2025 年上海高三数学竞赛

一、填空题（第 1 ～ 4 题每小题 7 分，第 5 ～ 8 题每小题 8 分，共 60 分）

1. 函数 $f(x)=x(2-x)^3, x\in(0,2)$，则 $f(x)$ 的最大值为________.

2. 对于实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $[\lg 1]+[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 2025]=$ ________.

3. 已知 α,β 是实数，$z_1=\sin 2\alpha+i\sin^2\alpha$，$z_2=\dfrac{1}{2}(\sin\beta+\cos\beta+i\sin 2\beta)$，其中 i 是虚数单位. 若 $z_1=z_2$，则 $\cos 2\alpha$ 的值是________.

4. 在正方形 $ABCD$ 中，以顶点 B 为圆心、BA 长为半径作劣弧 $\overset{\frown}{AC}$. P 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上一个动点，连 PD，将 PD 绕点 P 逆时针方向旋转 90°，得到线段 PE，连 BE. 若 $\triangle BPE$ 面积的最大值为 10，则正方形 $ABCD$ 的面积为________.

5. 已知函数 $f(x)=m(x-2m)(x-m^2+2), g(x)=2^x-4$. 若对任意实数 x 均有 $f(x)<0$ 或者 $g(x)<0$，则实数 m 的取值范围是________.

6. 从 $1,2,\cdots,30$ 这 30 个正整数中任取 3 个不同的数 a,b,c，$a<b<c$，则数列 a,b,c 能构成等比数列的概率是________.（用最简分数表示答案）

7. 设向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夹角为 θ，且满足 $|\overrightarrow{a}|=5, \cos\theta=\dfrac{4}{5}$. 若对任意实数 λ，均有 $|\overrightarrow{b}-\lambda\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|$，则 $|t\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|+|t\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}|(t\in\mathbb{R})$ 的最小值为________.

8. 对于正整数 n，记 a_n 表示与 $\sqrt{n}$ 最接近的整数，例如 $a_2=1, a_3=2$. 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leq 1000$，则 n 的最大值为________.

二、解答题（每小题 15 分，共 60 分）

9. 已知底面半径为 3，高为 4 的圆锥内有一个内接圆柱，圆柱的上底面与圆锥的侧面所围成的小圆锥内有一个内切球. 求内接圆柱与内切球的体积和的最大值.（π 可以保留在答案中）

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 若直线 l 是过 Γ 右支上点 P 的切线，且 l 不与 x 轴垂直. 过点 F_1,F_2 分别作直线 l 的垂线，垂足为 T_1,T_2.

(1) 求证：点 T_1,T_2 均在以 O 为圆心、a 为半径的圆上，并且 $OT_1 \parallel F_2P, OT_2 \parallel F_1P$；

(2) 求证：$|F_1T_1|\cdot|F_2T_2|$ 是定值.

11. 记 $\mathbb{N}^*$ 表示全体正整数构成的集合. 已知定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的严格递增函数 $f(n)$，其值域 $A\subseteq\mathbb{N}^*$，且对任意正整数 n 均有 $f(f(n))=3n$.

(1) 求 $f(1),f(2)$ 的值；

(2) 求 $f(2025)$ 的值.

12. 在一个 45×45 的方格表中，取出十个矩形 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$，满足：每个矩形的四条边都重合于方格表的网格线或边界，且对每个 $i=1,2,\cdots,9$，矩形 Γ_i 完全位于 Γ_{i+1} 的内部（不含边界）. 设 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{10}$ 的面积分别为 $S_1,S_2,\cdots,S_{10}$.

(1) 求证：对每个 $i=1,2,\cdots,10$，都有 $S_i\neq333$；

(2) 将 $\dfrac{S_2}{S_1},\dfrac{S_3}{S_2},\cdots,\dfrac{S_{10}}{S_9}$ 中的最小数记为 m，求 m 的最大可能值.