2025 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）
(一试)

本试卷共 2 页， 12 小题，满分 120 分，考试用时 90 分钟。

一，填空题（每小题 8 分，共 80 分）

1．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$ ，集合 $A=\left\{\sin a_n \mid n\in\mathbf{N}^*\right\}$ 有且仅有两个元素，则集合 A 的两个元素之积为__________.

2．已知实数 a,b 满足 $\ln\sqrt{2a-1}+a-5=0$ ， $\mathrm{e}^b+b-9=0$ ，则 $2a+b=$__________.

3．记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ，若 $ab\cdot\cos C,\ bc\cdot\cos A,\ ca\cdot\cos B$ 依次构成公比为 2 的等比数列．则 $\tan B=$__________.

4．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(-2-x)=f(x)$ ，且 $f(-3)=1$ ，则 $\sum_{i=1}^{4n+1} i^2 f(i)=$ __________.

5．已知双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2 ，过 F_2 的直线 l 与 C 的右支交于 A,B 两点，若 $\triangle AF_1B$ 的外接圆被 x 轴截得的弦长为 7 ，则 $|AB|=$__________.

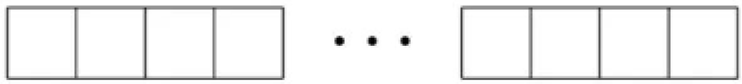
6．从棱长为 1 的正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的八个顶点中随机取出 4 个点，记这四个点构成的空间几何体的体积为 V ，规定四点共面时 $V=0$ ．则 V 的数学期望为__________.

7．两个正整数 $a,b(a\leqslant b)$ 满足：$(a,b)+[a,b]+a+b=a\cdot b$（其中 (a,b) 表示 a 与 b 的最大公约数，$[a,b]$表示 a 与 b 的最小公倍数），记 $a+b=n$ ，则所有 n 的取值之和为__________.

8．已知正数 x,y,z,w 满足 $x+2y\leqslant 3z+4w, x\geqslant y\geqslant z$ ，则 $\frac{4w}{3y}+\frac{z}{2x}$ 的最小值为__________.

9．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC ，且 $PA=BC=1, AB+AC=2$ ，若二面角 $P-BC-A$的平面角与 $\angle BAC$ 的大小相等，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为__________.

10．给定正整数 $n\geqslant 4$ ，由 $3n+1$ 条单位线段围成如图所示的 1 行 n 列相连的单位正方形的方格图，其中水平的单位线段称为＂横线段＂，坚直的单位线段称为＂坚线段＂．现将方格图中的部分单位线段染成红色，如果图中的红色的横线段和红色的坚线段总没有公共点，则称这种染法为＂无直角＂的．在所有使得上述方格图＂无直角＂的染法中，恰有两条红色坚线段的染法种数为__________.



二，解答题（每题 20 分，共 40 分）

11．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴端点分别为 $A(0,b),B(0,-b)$ ，以 AB 为直径的圆与直线 $ax-by=0$ 的一个交点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）是否存在方向向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1)$ 的直线 l ，与椭圆交于 D,E 两点（异于点 A ），且 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ？若存在，求出所有满足条件的直线方程；若不存在，说明理由．

12．已知 i 为虚数单位，复数 $z_i(i=1,2,3)$ 满足：$\left|z_2\right|=1$ 且 $\left|z_1+iz_2^2\right|+\left|z_2+z_3^2\right|\leqslant 3$ ，求 $\left|z_1^2+z_2\right|+\left|z_2^2+z_3\right|$ 的最大值．

2025 年广州市中学生数学与科学联赛（数学）
(二试)

1．对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，证明：

$$\left(\max_{1\le i\le n} x_i\right)^2+4\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max_{1\le j\le i} x_j\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)\le 4x_n^2$$

2. 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高线，在 AD 上取点 $E,AF\perp CE$ 于点 F,AF 交 BC 于点 $G,HE\perp AB$ 于点 H,HE 交 BC 于点 I,BE 与 AI 交于点 M,GE 与 AC 交于点 N ．求证：HF 与 MN 的交点在 BC 上．