1 小蓝本平面几何

例 1.1 (第六章习题10). 两个大圆$\odot A, \odot B$半径相等且相交，两个小圆$\odot C, \odot D$半径不等且相交，交点为P, Q。若$\odot C, \odot D$既同时与$\odot A$内切，又同时与$\odot B$外切，求证：直线PQ平分线段AB。

证. □

例 1.2 (第六章习题13). 已知非锐角$\triangle ABC$中，O, H分别是外心和垂心，AA_1, BB_1是两条高。设J, K分别是AC, BC的中点，线段A_1B_1与JK交于点D。求证：$OH \perp CD$。

证. □

例 1.3 (第六章习题14). 在$\triangle ABC$中，$\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$分别是点$A, B, C$所对的旁切圆，$I, G$是$\triangle ABC$的内心、重心。求证：$\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$的根心在直线$IG$上。

证. □

例 1.4 (第六章习题15). AB, AC是$\odot O$的切线，ADE是一条割线，M为DE的中点。P为直线OM上的一动点，$\odot P$是以P点为圆心，PD为半径的圆。求证：C点在$\triangle BMP$的外接圆与$\odot P$的根轴上。

证. 作$\triangle BAF \backsim \triangle BOP$，设$PF$中点为$Q$，则$Q$为$\triangle BMP$的外心。

$$\mathrm{Pow}(C, \odot Q) = QC^2 - PQ^2, \qquad CQ^2 = \frac{1}{2}(CP^2 + CF^2) - PQ^2, \qquad CF^2 = CA^2 + AF^2 + 2CA \cdot AF \cos\angle MAC$$

□

2 小蓝本均值不等式柯西不等式

例 2.1.

证. □

例 2.2.

证. □

例 2.3. a, b, c是非负实数，且不全为零。求证：

$$\frac{a}{a+b+7c} + \frac{b}{b+c+7a} + \frac{c}{c+a+7b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq 1, \qquad ①$$

分析：由柯西不等式，$\sum \frac{a}{a+b+7c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a(a+b+7c)} = \frac{(a+b+c)^2}{\sum a^2 + 8\sum ab} \geq \frac{1}{3}$。

证. □

例 2.4. 设$a, b, c > 0$，求证：$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \qquad ①$。

分析：不妨设$a + b + c = 3$，则①式$\Longleftrightarrow \sum \frac{a^2}{b} + 3 \geq 2\sum a^2$。我们先尝试证明一个更简单的不等式：$\sum \frac{a^2}{b} \geq \sum a^2 \quad ②$。由均值不等式，$\sum(\frac{a^2}{b} + a^2 b) \geq 2\sum a^2$，以及$\sum a^2 - \sum a^2 b = \frac{1}{3}[\sum a^2(a+c) - 2\sum a^2 b] = \frac{1}{3}\sum a(a-b)^2 \geq 0$，以上两式相加即得②式成立。我们还有$\sum(\frac{a^2}{b} + ab) \geq 2\sum a^{\frac{3}{2}}$。

证. 不妨设$a=\max\{a,b,c\}$。若$a\ge c\ge b$，则$\sum\frac{a^2}{b}-\sum\frac{a^2}{c}=\frac{1}{abc}[\sum a^3(c-b)]=\frac{1}{abc}[\sum a^3(c-b)]=\frac{a+b+c}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)\ge 0$，交换$b,c$会使$\sum\frac{a^2}{b}$减小，于是可不妨设$a\ge b\ge c$。 □

例 2.5 (郑楚桥)**.** 在$\triangle ABC$中，求$F=3\cos A+4\cos B+5\cos C$的最大值。

证. 设$x,y,z>0$，满足$yz=3$，$zx=4$，$xy=5$。由嵌入不等式，$F=yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C\le\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}(\frac{4\cdot 5}{3}+\frac{5\cdot 3}{4}+\frac{3\cdot 4}{5})=\frac{1}{2}\cdot\frac{20^2+15^2+12^2}{60}=\frac{769}{120}$。 □

例 2.6.

证. □

3 历年真题小测

3.1 2024年北京预赛

例 3.1. 设a,b,c是三个正数，求证：

$$\frac{2a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}+\frac{2b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}+\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2+2c^2}}\le\frac{3\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}},\qquad ①$$

分析：因为将a,b,c同时乘以同一正数不改变①式左右两边，所以可不妨设$a^2+b^2+c^2=3$。我们证明

$$①\text{式左边}=\frac{2a}{\sqrt{3+a^2}}+\frac{2b}{\sqrt{3+b^2}}+\frac{2c}{\sqrt{3+c^2}}\le a+b+c,\qquad ②$$

证. 法一：设$x=a^2$，$f(x)=2\sqrt{\frac{x}{3+x}}-\sqrt{x}$，则$f(1)=0$，$f'(x)=\frac{3}{(3+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(1)=-\frac{1}{8}$，我们证明$f(x)\le\frac{1}{8}(1-x)$　③对$x\in[0,3]$成立。

$$f(x)=2\sqrt{\frac{x}{3+x}}-\sqrt{x}=\sqrt{\frac{x}{3+x}}\cdot(2-\sqrt{3+x})=\sqrt{\frac{x}{3+x}}\cdot\frac{1-x}{2+\sqrt{3+x}},\qquad ④$$

设$g(x)=(2+\sqrt{3+x})\sqrt{3+x}-8\sqrt{x}=3+x+2\sqrt{3+x}-8\sqrt{x}$，则

$$④\text{式右边}\le ③\text{式右边}\Longleftrightarrow(1-x)g(x)\ge 0,\qquad ⑤$$

$$\text{因为}g'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{3+x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}<1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}<0,\qquad g(1)=0,$$

所以$x<1$时，$g(x)>0$，$x>1$时，$g(x)<0$，于是⑤式成立，③式成立。于是

$$②\text{式左边}-\text{右边}=\sum(\frac{2a}{\sqrt{3+a^2}}-a)\le\frac{1}{8}(3-a^2-b^2-c^2)=0,$$

②式成立。因为$\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}\le\sqrt{6a^2+6b^2+6c^2}=3\sqrt{2}$，所以②式右边≤①式右边，①式得证。

法二：我们证明$\dfrac{2a}{\sqrt{3+a^2}} \le \dfrac{5a-a^2}{4}$ ⑥，即$\dfrac{8}{\sqrt{3+a^2}} \le 5-a \Longleftrightarrow$

$$\frac{64}{3+a^2} \le 25-10a+a^2 \Longleftrightarrow 64 \le (a^2+3)(a^2-10a+25) = a^4-10a^3+28a^2-30a+75, \qquad ⑦$$

因为$a \le \sqrt{3} < 4$，所以$a^2-8a+11 \ge \sqrt{3}^2 - 8\sqrt{3}+11 = 2(7-4\sqrt{3}) > 0$，于是⑦式右边$-$左边$= a^4-10a^3+28a^2-30a+11 = (a-1)^2(a^2-8a+11) \ge 0$，⑦, ⑥式成立。同理$\dfrac{2b}{\sqrt{3+b^2}} \le \dfrac{5b-b^2}{4}$，$\dfrac{2c}{\sqrt{3+c^2}} \le \dfrac{5c-c^2}{4}$，又因为$a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3$，所以

$$①式左边 = \sum \frac{2a}{\sqrt{3+a^2}} \le \frac{5}{4}(a+b+c) - \frac{a^2+b^2+c^2}{4} = \frac{5}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4} \le a+b+c,$$

②式成立。由法一最后的论述知①式得证。

法三：我们证明$x\in[0,3]$时，$f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x}{3+x}} - \sqrt{x}$是上凸函数 ⑧。$f'(x) = 3(3+x)^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}$，

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\cdot(-\frac{3}{2})(3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + 3\cdot(-\frac{1}{2})(3+x)^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= (3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}(-\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}(3+x) + \frac{1}{4}(3+x)^{\frac{5}{2}}) = (3+x)^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}(-6x - \frac{9}{2} + \frac{1}{4}(3+x)^{\frac{5}{2}}), \end{aligned}$$

命题⑧$\Longleftrightarrow$ $x \in [0,3]$时，$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow (3+x)^{\frac{5}{2}} < 24x+18$ ⑨。因为⑨式左边$-$右边在$x\in[0,3]$时是下凸函数，所以只需验证$x=0,3$时⑨式成立。$x=0$时，因为$3^5 < 10^2$，所以$3^{\frac{5}{2}} < 18$；$x=3$时，因为$2^3\cdot 3 < 5^2$，所以$6^5 = 2^5\cdot 3^5 < 90^2 = 2^2\cdot 3^4\cdot 5^2$，$6^{\frac{5}{2}} < 90 = 24\cdot 3+18$，于是⑨式成立，命题⑧成立。由琴生不等式，②式左边$-$右边$= f(a^2)+f(b^2)+f(c^2) \le 3f(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}) = 3f(1) = 0$，②式成立。由法一最后的论述知①式得证。

法四：设$f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - x$，待定常数$A$满足$f(x) \le A(x^2-1)+f(1) = A(x^2-1)$对任意$0 \le x \le \sqrt{3}$成立。我们有$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} - 2x^2(x^2+3)^{-\frac{3}{2}} - 1$，$f'(1) = -\dfrac{1}{4}$，$A\cdot \dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1} = 2A = f'(1)$，$A = -\dfrac{1}{8}$。要证$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} \le \dfrac{1+8x-x^2}{8} \Longleftrightarrow 256x^2 \le (x^2+3)(1+8x-x^2)^2$。

$$\begin{aligned} &上式右边-左边 = x^6-16x^5+65x^4-32x^3-69x^2+48x+3 \\ &= (x-1)(x^5-15x^4+50x^3+18x^2-51x-3) = (x-1)^2(x^4-14x^3+36x^2+54x+3) \ge 0, \end{aligned}$$

这里用到$x \le \sqrt{3}$，$-14x^3+36x^2 \ge 0$。于是$f(a)+f(b)+f(c) \le -\dfrac{1}{8}(x^2+y^2+z^2-3) = 0$，②式成立。由法一最后的论述知①式得证。 □

例 3.2. 锐角$\triangle ABC$的三条高AD, BE, CF交于点H，过点F作$FG /\!/ AC$交直线BC于点G。设$\triangle CFG$的外接圆为$\odot O$，$\odot O$与直线AC的另一个交点为P。过P作$PQ /\!/ DE$交直线AD于点Q，连接OD, OQ。求证：$OD = OQ$。

分析：我们给出两种证法，法一用余弦定理算出了$\mathrm{Pow}(D,\odot O)$，$\mathrm{Pow}(Q,\odot O)$。法二只用导角给出了一个简短的证明。

证. 法一（三角法）：

法二（何高乐）： □

3.2　2021年高联B卷

例 3.3. I是$\triangle ABC$的内心，点P,Q分别为I在边AB,AC上的投影，直线PQ与$\triangle ABC$的外接圆交于点X,Y（P在X,Q之 间）。已知B,I,P,X四点共圆，求证：C,I,Q,Y四点共圆。

证. 法二（何高乐）：$\angle XBA+\dfrac{B}{2}=\angle XBI=\angle IPQ=\dfrac{A}{2}$，所以$\angle XBA=\dfrac{A-B}{2}$。$\angle XCB=C-\angle XCA=C-\dfrac{A-B}{2}$，$\dfrac{\pi-A}{2}=\angle APQ=\angle XAB+\angle AXY$，$\angle AXY=\dfrac{\pi-A}{2}-C+\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{A-C}{2}$。于是$\angle ICY=\angle ICQ+\angle ACY=\dfrac{C}{2}+\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{A}{2}=\angle IQP$，$C,I,Q,Y$四点共圆。 □

3.3　2024年上海预赛

例 3.4.

证. $R=\dfrac{3}{4}(4-h)$，$h=4-\dfrac{4}{3}R$，$r=\dfrac{R}{2}$。总体积为$V=\pi R^2h+\dfrac{4}{3}\pi r^3=\pi[R^2(4-\dfrac{4}{3}R)+\dfrac{R^3}{6}]=\pi[4R^2-\dfrac{7}{6}R^3]$。设$f(R)=4R^2-\dfrac{7}{6}R^3$，因为$f'(R)=8R-\dfrac{7}{2}R^2=R(8-\dfrac{7}{2}R)$，所以$f(R)\le f(\dfrac{16}{7})$。$R=\dfrac{16}{7}$时$V$取最大值$\pi R^2(4-\dfrac{7}{6}R)=\pi(\dfrac{16}{7})^2\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{1024}{147}\pi$。 □

例 3.5.

证. （1）$f(1)=2$，$f(2)=3$。（2）我们证明$f(3^n)=2\cdot 3^n$，$f(2\cdot 3^n)=3^{n+1}$。由（1）的结论，$n=0$时命题成立。$f(729)=1458$，$f(1458)=2187$，$f(1296)=2025$，$f(2025)=3\cdot 1296=3888$ □

例 3.6.

证. □

例 3.7.

证. □

例 3.8.

证. □

3.4　2021年高联A卷

例 3.9.

证. □

例 3.10.

证. □

例 3.11.

证. □

例 3.12.

证. □

例 3.13.

证. □