1 初等不等式中的重要定理

定义 1.1. 对n个正实数$a_1, a_2, ..., a_n$，定义它们的算术平均为$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$，几何平均为$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$，调和平均为$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$，平方平均为$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$。

定理 1.1 (均值不等式)**.** 对任意n个正实数$a_1, a_2, ..., a_n$，均成立下列不等式：$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$。其中每个等号都当且仅当$a_1 = a_2 = ... = a_n$时成立。 注：均值不等式可以推广成下述加权形式：设$p > 1$，$\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$，$\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$是正实数，满足$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，则有$(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{-1})^{-1} \leq \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \leq \sum_{i=1}^{n} w_i a_i \leq (\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^p)^{\frac{1}{p}}$。其中每个等号都当且仅当$a_1 = a_2 = ... = a_n$时成立。

定理 1.2 (柯西不等式)**.** 设a_i, b_i $(1 \leq i \leq n)$为实数，则$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$。等号成立当且仅当$a_i$全为0或存在实数$\lambda$使得$b_i = \lambda a_i$ $(1 \leq i \leq n)$。

证. 法一：构造函数$f(t) = t^2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) + 2t(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，则$f(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2 \geq 0$对任意实数$t$成立。只考虑$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$的情形，我们有$f(t)$的判别式$\Delta = 4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \leq 0$。

法二：由拉格朗日恒等式，$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = \sum_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$。 □

推论 1.1. 设$b_i > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$，我们有$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$。

推论 1.2 (闵可夫斯基不等式)**.** 设$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$，我们有

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2},$$

事实上，设$\alpha_i = (a_i, b_i)$ $(1 \leq i \leq n)$，那么上式即$|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| \geq |\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|$，所以该不等式又称作三角不等式。

定理 1.3 (赫尔德不等式)**.** 若$p, q > 0$，且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则对任意正实数$\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$，$\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{1/q},$$

定理 1.4 (卡尔松不等式)**.** 设m, n是正整数，对mn个正实数a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$，有

$$\prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^m) \geq (\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ij})^m,$$

$m = 2$时即为柯西不等式。

定义 1.2 (函数的凹凸性)**.** 设函数$f : [a, b] \to \mathbb{R}$。（1）若对任意的$x, y \in [a, b]$以及$t \in [0, 1]$，都有$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$，则称$f(x)$为$[a, b]$上的下凸函数（或凸函数）。（2）若将上述不等式方向变

为$tf(x)+(1-t)f(y)\le f(tx+(1-t)y)$，其余条件不变，则称$f(x)$为$[a,b]$上的上凸函数（或凹函数）。以上两种情形中，若$x\neq y$时不等式总是严格成立，则称$f(x)$为$[a,b]$上的严格下凸（或上凸）函数。

性质 1.1. 下列性质对下凸函数和上凸函数都有着对应的陈述。

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当$f'(x)$在$[a,b]$上单调不减（不增）。$f(x)$严格下凸（上凸）时，$f'(x)$严格单调增（减）。

（2）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当$x\in(a,b)$时$f''(x)\ge 0$（$f''(x)\le 0$）。

（3）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，对$t\in[a,b]$，设$g_t(x)=f(t)+f'(t)(x-t)$是$f(x)$在$x=t$处的切线，则$f(x)$为下凸（上凸）函数当且仅当对任意$t\in[a,b]$，$f(x)\ge g_t(x)$（$f(x)\le g_t(x)$）对任意$x\in[a,b]$均成立。

（4）定义在开区间(a,b)上的下凸（上凸）函数一定连续。注：若将定义域改成闭区间则不一定连续。

定理 1.5 (琴生不等式)**.** （1）设$f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数，则对任意$x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$，和任意满足$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$的正实数$\{w_i\}_{1\le i\le n}$，都有$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\le w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。（2）若将条件中的$f(x)$改为上凸函数，其余条件不变，也有类似的结论成立：$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\ge w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。以上两种情形中，当$f(x)$是严格下凸（上凸）函数时，等号成立当且仅当$x_1=x_2=...=x_n$。

定理 1.6 (排序不等式)**.** 设两列数$\{a_i\}_{1\le i\le n}$，$\{b_i\}_{1\le i\le n}$满足$a_1\le a_2\le ...\le a_n$，$b_1\le b_2\le ...\le b_n$，$\{t_i\}_{1\le i\le n}$是$\{1,2,...,n\}$的任意一个排列，我们有$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+...+a_nb_{t_n}\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。也就是说，顺序和≥乱序和≥反序和。当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$或$b_1=b_2=...=b_n$时等号成立。

引理 1.1 (阿贝尔变换，又称分部求和法)**.** 设$\{x_i\}_{1\le i\le n}$，$\{y_i\}_{1\le i\le n}$是两列数，$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}y_i$ $(1\le k\le n)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})S_i+x_nS_n$。

证. 左边$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(S_i-S_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iS_i-\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_{i+1}S_i=$右边。 □

定理 1.7 (切比雪夫不等式)**.** 设两列数$\{a_i\}_{1\le i\le n}$，$\{b_i\}_{1\le i\le n}$满足$a_1\le a_2\le ...\le a_n$，$b_1\le b_2\le ...\le b_n$，则$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge \dfrac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。

例 1.1 (Nesbitt不等式)**.** 设a,b,c为正实数，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$。尝试用均值不等式，柯西不等式，琴生不等式，切比雪夫不等式给出不同的证明。

证. 法一：由均值不等式，$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})\ge\dfrac{3}{b+c+c+a+a+b}=\dfrac{3}{2(a+b+c)}$，于是$\sum\dfrac{a}{b+c}+3=\sum\dfrac{a+b+c}{b+c}\ge\dfrac{9}{2}$，左边$\ge\dfrac{3}{2}$。

法二：不妨设$a+b+c=\dfrac{3}{2}$，我们有$\dfrac{a}{b+c}+a(b+c)\ge 2a$。于是左边$\ge 2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)\ge 3-\dfrac{2}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{3}{2}$。

法三：由柯西不等式，左边$\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a(b+c)}\ge\dfrac{3}{2}$。

法四：不妨设$a+b+c=3$，$f(x)=\dfrac{x}{3-x}$，则$f'(x)=\dfrac{3}{(3-x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{6}{(3-x)^3}>0$，由琴生不等式，左边$=f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(1)=\dfrac{3}{2}$。

法五：不妨设$a\ge b\ge c$，则$\dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{b}{c+a}\ge\dfrac{c}{a+b}$，$b+c\le c+a\le a+b$，左边$\cdot(b+c+c+a+a+b)\ge 3(a+b+c)$，左边$\ge\dfrac{3}{2}$。

法六：不妨设$a\ge b\ge c$，则$\dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{b}{c+a}\ge\dfrac{c}{a+b}$。由切比雪夫不等式，$3\sum\dfrac{a}{b+c}\ge(a+b+c)\dfrac{1}{b+c}=\sum\dfrac{a}{b+c}+3$，于是左边$\ge\dfrac{3}{2}$。 □

例 1.2. 已知$a,b,c>0$，$a^2+b^2+c^2=14$，求证：$a^5+\dfrac{1}{8}b^5+\dfrac{1}{27}c^5\ge 14$ ①。尝试用均值不等式和赫尔德不等式给出不同的证明。

证. 法一：由赫尔德不等式，$(a^5+\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{c^5}{27})^{\frac{2}{5}}(1+4+9)^{\frac{3}{5}}\ge a^2+b^2+c^2=14$，所以①式左边$\ge 14$。

法二：设$\lambda>0$为待定常数，我们有

$$\frac{2}{5}a^5+\frac{3}{5}\lambda^5\ge a^2\lambda^3,\qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{b^5}{8}+\frac{3}{5}\cdot 4\lambda^5\ge b^2\lambda^3,\qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{c^5}{27}+\frac{3}{5}\cdot 9\lambda^5\ge c^2\lambda^3,$$

取等时$a^5=\lambda^5$，$\dfrac{b^5}{8}=4\lambda^5$，$\dfrac{c^5}{27}=9\lambda^5$，即$a=\lambda$，$b=2\lambda$，$c=3\lambda$。于是$14=a^2+b^2+c^2=14\lambda^2$，解得$\lambda=1$。所以$\dfrac{2}{5}(a^5+\dfrac{b^5}{8}+\dfrac{c^5}{27})+\dfrac{3}{5}(1+4+9)\ge 14$，①式左边$\ge 14$。 □

例 1.3. 设a,b,c为正实数，求证：$(a+\dfrac{1}{b})(b+\dfrac{1}{c})(c+\dfrac{1}{a})\ge 8$。

证. 由均值不等式，左边$\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}=8$。 □

例 1.4. 已知非负实数x,y,z满足$2x+3y+5z=6$，求x^2yz的最大值。

证. $6=x+x+3y+5z\ge 4\sqrt[4]{x^2\cdot 3y\cdot 5z}$，$x^2yz\le\dfrac{1}{15}\cdot(\dfrac{3}{2})^4=\dfrac{27}{80}$，$x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{3}{10}$时等号成立，所以$x^2yz$最大值为$\dfrac{27}{80}$。 □

例 1.5. 已知非负实数a,b,c,d，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\ge 2$ ①。

证. 法一：不妨设$a+b+c+d=2$，则$\dfrac{a}{b+c}+a(b+c)\ge 2a$，同理有另外三个式子，求和得

$$\begin{aligned}①\text{式左边}-\text{右边}&\ge 2\sum a-\sum a(b+c)-2=2-(a+c)(b+d)-2ac-2bd\\&=\frac{1}{2}[(a+c)^2+(b+d)^2]-2ac-2bd=\frac{1}{2}[(a-c)^2+(b-d)^2]\ge 0,\end{aligned}$$

法二：由柯西不等式，①式左边$\ge\dfrac{(a+b+c+d)^2}{\sum a(b+c)}=\dfrac{(a+b+c+d)^2}{(a+c)(b+d)+2ac+2bd}$。由法一的结论，上式右边$\ge 2$。 □

例 1.6. 已知$a,b,c\in(0,1)$，且满足$ab+bc+ca=1$。求证：$\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ①。

证. 法一：

法二：由均值不等式，$\frac{a}{1-a^2}+\frac{9}{4}a(1-a^2)\geq 2\cdot\frac{3}{2}a=3a$，所以$\frac{a}{1-a^2}\geq\frac{3}{4}a+\frac{9}{4}a^3$。

法三：设$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$，则$f'(x)=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，它的分子单调增，分母单调减，所以$f'(x)$单调增，$f(x)$是下凸函数。又因为$f(x)$单调增，且$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，由琴生不等式，①式左边$=f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(\frac{a+b+c}{3})\geq 3f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

法四：设$s=a+b+c\geq\sqrt{3}$，则$\sum a^3\geq\frac{s^3}{9}$。①式左边$\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum a(1-a^2)}=\frac{s^2}{s-\sum a^3}\geq\frac{s^2}{s-\frac{s^3}{9}}=\frac{s}{1-\frac{s^2}{9}}\geq\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，最后一步用到$\frac{s}{1-\frac{s^2}{9}}$关于$s$单调增。

法五：存在$A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，$A+B+C=\pi$，使得$a=\tan\frac{A}{2}$，$b=\tan\frac{B}{2}$，$c=\tan\frac{C}{2}$。

法六：不妨设$a\geq b\geq c$，则$\frac{a}{1-a^2}\geq\frac{b}{1-b^2}\geq\frac{c}{1-c^2}$，$1-a^2\leq 1-b^2\leq 1-c^2$。由切比雪夫不等式，①式左边$\cdot\sum(1-a^2)\geq 3(a+b+c)\geq 3\sqrt{3}$。又因为$\sum(1-a^2)\leq 3-\sum ab=2$，所以①式左边$\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

例 1.7. 设正实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$ ①。

证. ①式左边$-$右边$=\sum\sqrt{a}-\frac{1}{2}(3^2-\sum a^2)=\sum(\sqrt{a}+\frac{a^2}{2})-\frac{9}{2}\geq\sum\frac{3a}{2}-\frac{9}{2}=0$，这里用到了均值不等式。 □

例 1.8. 设非负实数a,b,c,d满足$ab+bc+cd+da=1$。求证：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$。尝试用均值不等式和柯西不等式给出不同的证明。

证. 法一：

法二： □

例 1.9. 设正实数a,b,c满足$ab+bc+ca=\frac{1}{3}$，求证：

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c},\qquad ①$$

证. 由柯西不等式，①式左边$\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum a(a^2-bc+1)}$ □

例 1.10. 设a,b,c是正实数，求证：$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0,\qquad$ ①。

证. 只需证明$3-2\cdot$①式左边$=\sum\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\leq 3$ ②。由柯西不等式，$\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+a^2+c^2}\leq\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$，对上式轮换求和即得②式成立。 □

例 1.11. 已知$(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\,1\leq j\leq n}$满足"$a_{ij}=a_{ji}$，且对任意实数$x_1,x_2,...,x_n$，都有$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geq 0$，当且仅当$x_1=x_2=...=x_n=0$时等号成立"。求证：对任意实数$\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\{y_i\}_{1\leq i\leq n}$，都有$(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j)^2\leq$

$(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j)(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j)$。

注：本题中满足引号所述条件的方阵$A=(a_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$即为正定矩阵。

证. □

例 1.12. 设$x_i\ (1\le i\le 5)$是正实数，满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$。求证：$\sum_{i=1}^{5}\frac{4}{4+x_i^2}\ge 1$。

证. 设$y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$1\le i\le 5$，则$x_i=\frac{1}{y_i}-1$，$\sum_{i=1}^{5}y_i=1$。 □

例 1.13. 求最小的实数m，使得对满足$a+b+c=1$的任意正实数a,b,c，都有$m(a^3+b^3+c^3)\ge 6(a^2+b^2+c^2)+1$。

证. □

例 1.14. 设正实数a,b,c,d满足$a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求证：

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}, \qquad ①$$

证. 法一：由柯西不等式，①式左边$\ge\frac{(\sum a^2)^2}{\sum a^2(b+c+d)}=\frac{16}{4\sum a-\sum a^3}\ge\frac{16}{4\cdot 4-4}=\frac{4}{3}$。这里用到了幂平均不等式$\frac{\sum a}{4}\le(\frac{\sum a^2}{4})^{\frac{1}{2}}\le(\frac{\sum a^3}{4})^{\frac{1}{3}}$，所以$\sum a\le 4\le\sum a^3$。

法二：由均值不等式，$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{1}{9}\cdot a^2(b+c+d)\ge\frac{2}{3}a^2$，所以①式左边$\ge\frac{2}{3}\sum a^2-\frac{1}{9}\sum a^2(b+c+d)\ge\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$，这里用到法一中$\sum a^2(b+c+d)\le 12$的结论。 □

例 1.15. 给定正整数n，$\{a_i\}_{1\le i\le n}$是正实数，满足对任意$1\le k\le n$，都有$a_1+a_2+...+a_k\le k$。求证：$a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n}\le 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\quad$①。

证. 设$S_0=0$，$1\le k\le n$时，设$S_k=a_1+a_2+...+a_k\le k$，则①式左边$=\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})\cdot\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\cdot(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})+\frac{S_n}{n}\le\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})+\frac{n}{n}=$①式右边。 □

例 1.16. 在$\triangle ABC$中，求$\sin A+\sin B+\sin C$的最大值。

证. □

2 圆锥曲线的定义与性质

1. 直线方程的各种形式：（1）点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；（2）斜截式：$y=kx+b$；（3）两点式：$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；（4）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a,b\ne 0)$；（5）一般式：$Ax+By+C=0$，其中实数$A,B$不同时为0，此时$(A,B)$是该直线的法向。（6）直线的参数方程：$x=x_0+t\cos\alpha$，$y=y_0+t\sin\alpha$，其中实数$t$为参数。 点到直线的距离公式：设点$P(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离为$d$，则$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

3. 圆方程的各种形式：（1）标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ $(R>0)$，其中(a,b)为圆心，R为半径；（2）一般方程：$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$，其中$R^2=D^2+E^2-F>0$；（3）参数方程：$x=a+R\cos\alpha$，$y=b+R\sin\alpha$，其中α为参数，(a,b)为圆心，R为半径。回忆：假设圆ω的标准方程和一般方程由（1）（2）给出，那么平面几何课中介绍的点$P(x_0,y_0)$到圆ω的幂为$\mathrm{Pow}(P,\omega)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=x_0^2+y_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$。

4. 椭圆的定义：平面内到两个定点的距离之和等于常数（该常数大于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为椭圆。椭圆的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$。设$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则该椭圆的焦点为$(\pm c,0)$，顶点$(\pm a,0)$，离心率$e=\dfrac{c}{a}$，$0<e<1$。e越大，椭圆形状越扁平，e越小，椭圆形状越接近圆。

证. 假设平面内两个定点为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点$P(x_0,y_0)$到两定点的距离之和为常数$2a$，$a>c$。我们有

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a,\qquad \sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},$$
$$(x_0+c)^2+y_0^2=4a^2+(x_0-c)^2+y_0^2-4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},\qquad 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=4a^2-4x_0c,$$
$$a^2[(x_0-c)^2+y_0^2]=a^4-2a^2x_0c+x_0^2c^2,\qquad x_0^2(a^2-c^2)+y_0^2a^2=a^2(a^2-c^2),$$

设$b=\sqrt{a^2-c^2}$，我们得到$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

5. 双曲线的定义：平面内到两个定点的距离之差等于非零常数（该常数小于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为双曲线。双曲线的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$；设$c=\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的焦点为$(\pm c,0)$，顶点$(\pm a,0)$，离心率$e=\dfrac{c}{a}$，$e>1$。e越大，双曲线形状越接近两条平行直线，e越小，双曲线形状越接近两条方向相反的射线。称直线$y=\pm\dfrac{b}{a}x$是双曲线的两条渐近线。

证. 假设平面内两个定点为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点$P(x_0,y_0)$到两定点的距离之差为常数$2a$，$a<c$。不妨设$|PF_1|-|PF_2|=2a$，我们有

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a,\qquad \sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},$$
$$(x_0+c)^2+y_0^2=4a^2+(x_0-c)^2+y_0^2+4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2},\qquad 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=4x_0c-4a^2,$$
$$a^2[(x_0-c)^2+y_0^2]=a^4-2a^2x_0c+x_0^2c^2,\qquad x_0^2(c^2-a^2)-y_0^2a^2=a^2(c^2-a^2),$$

设$b=\sqrt{c^2-a^2}$，我们得到$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

6. 椭圆与双曲线的第二定义：到定点与定直线的距离之比为常数e的点的轨迹为：

（1）当$0<e<1$时，轨迹为离心率为e的椭圆，定点为椭圆的一个焦点；

（2）当$e>1$时，轨迹为离心率为e的双曲线，定点为双曲线的一个焦点。

称其中的定直线为椭圆和双曲线的准线。当定点为左焦点$(-c,0)$时，准线方程为$x=-\dfrac{a^2}{c}$；当定点为右焦点$(c,0)$时，准线方程为$x=\dfrac{a^2}{c}$。称二次曲线上一点$P(x_0,y_0)$到一个焦点的距离为焦半径。对于左焦点F_1，焦半径$|PF_1|=|a+ex_0|$；对于右焦点F_2，焦半径$|PF_2|=|a-ex_0|$。

注：作为一种特殊的椭圆，圆的离心率为$e=0$，但它没有准线，不能用椭圆的第二定义来描述。

证.（1）设定点到定直线的距离为p，正实数a,c满足$p=\frac{a^2}{c}-c$，$e=\frac{c}{a}$。解得$a=\frac{ep}{1-e^2}$，$c=\frac{e^2p}{1-e^2}$。建立平面直角坐标系，使得定点为$F(c,0)$，定直线为$l:x=\frac{a^2}{c}$。设点$P(x_0,y_0)$满足$|PF|=e\cdot d(P,l)$，我们有

$$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{c}{a}|x_0-\frac{a^2}{c}|,\qquad (x_0-c)^2+y_0^2=(\frac{c}{a})^2(x_0-\frac{a^2}{c})^2,\qquad x_0^2(1-\frac{c^2}{a^2})+y_0^2=a^2-c^2,$$

设$b=\sqrt{a^2-c^2}$，则有$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$。

（2）设焦准距为p，正实数a,c满足$p=c-\frac{a^2}{c}$，$e=\frac{c}{a}$。解得$a=\frac{ep}{e^2-1}$，$c=\frac{e^2p}{e^2-1}$。建立平面直角坐标系，使得定点为$F(c,0)$，定直线为$l:x=\frac{a^2}{c}$。设点$P(x_0,y_0)$满足$|PF|=e\cdot d(P,l)$，我们有

$$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{c}{a}|x_0-\frac{a^2}{c}|,\qquad (x_0-c)^2+y_0^2=(\frac{c}{a})^2(x_0-\frac{a^2}{c})^2,\qquad x_0^2(\frac{c^2}{a^2}-1)-y_0^2=c^2-a^2,$$

设$b=\sqrt{c^2-a^2}$，则有$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$。 □

7. 抛物线的定义：平面内到定点与定直线距离相等的点的轨迹称为抛物线。抛物线的标准方程：$x^2=2py$或$y^2=2px$，其中p为定点到定直线的距离，即焦准距。前者的对称轴是y轴，后者的对称轴是x轴，二者的顶点都在原点。抛物线$x^2=2py$的焦点坐标为$(0,\frac{p}{2})$，准线方程为$y=-\frac{p}{2}$。抛物线$y^2=2px$的焦点坐标为$(\frac{p}{2},0)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$。抛物线的离心率为$e=1$。

8. 圆锥曲线的光学性质：

（1）椭圆：从某个焦点出发的光线经椭圆反射后，反射光线通过另一个焦点。

（2）双曲线：从某个焦点出发的光线经双曲线反射后，反射光线的延长线通过另一个焦点。

（3）抛物线：从焦点出发的光线经抛物线反射后，反射光线与抛物线的对称轴平行。

证.（3）法一：

法二： □

9. 过圆锥曲线上一点的切线方程：设Γ为圆锥曲线，$P(x_0,y_0)$是Γ上的一点。当定义Γ的方程为下列情形时，Γ在点P处的切线l的方程如下：

（1）圆$\Gamma:x^2+y^2=r^2$，则$l:x_0x+y_0y=r^2$；

（2）圆$\Gamma:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则$l:(x_0-a)(x-a)+(y_0-a)(y-a)=r^2$；

（3）抛物线$\Gamma:y^2=2px$，则$l:y_0y=p(x+x_0)$；

（4）抛物线$\Gamma:x^2=2py$，则$l:x_0x=p(y+y_0)$；

（5）椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则$l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；

（6）双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则$l:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$；

（7）一般圆锥曲线$\Gamma:Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则$l:Ax_0x+B(x_0y+xy_0)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ ①。

证.（7）设$P(x_0,y_0)$在曲线Γ上，过P点的一条直线参数方程为$x=x_0+t\cos\alpha$，$y=y_0+t\sin\alpha$，$t\in\mathbb{R}$。将参数方程代入Γ的方程，有

$$\begin{aligned}0=&A(x_0+t\cos\alpha)^2+2B(x_0+t\cos\alpha)(y_0+t\sin\alpha)+C(y_0+t\sin\alpha)^2+2D(x_0+t\cos\alpha)\\&+2E(y_0+t\sin\alpha)+F=t^2(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)\end{aligned}$$

$$+2t(Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha),$$

若l是Γ在点P处的切线，则$t=0$是上式的重根，上式右边t的系数应为零，即

$$Ax_0\cos\alpha+B(x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha)+Cy_0\sin\alpha+D\cos\alpha+E\sin\alpha=0, \qquad ②$$

又因为l的方程可化为$\dfrac{x-x_0}{y-y_0}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，代入②式，得

$$\begin{aligned}0&=Ax_0(x-x_0)+B[x_0(y-y_0)+y_0(x-x_0)]+Cy_0(y-y_0)+D(x-x_0)+E(y-y_0)\\&=Ax_0x+B(x_0y+y_0x)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F,\end{aligned}$$

所以①式成立。 □

10. 极坐标下圆锥曲线的方程：动点P到定点F的距离与其到定直线l的距离之比为一定常数$e>0$，则P的轨迹为一条圆锥曲线Γ。此时F为Γ的焦点，l为Γ的准线，设它们的位置关系如图，x轴垂直于l，$\theta=\angle PFx$。设$p=d(F,l)$为Γ的焦准距，$r=|PF|$，则$d(P,l)=d(F,l)+r\cos\theta$，$r=ed(P,l)=e(p+r\cos\theta)$，于是$r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，这是极坐标下（除了圆以外的）圆锥曲线的统一方程。

例 2.1. 已知双曲线$C:3x^2-y^2=3a^2$，F_1,F_2分别为C的左右焦点，A为C的左顶点，Q为第一象限内C上任意一点。是否存在常数$k>0$，使得$\angle QF_2A=k\angle QAF_2$恒成立？若存在，求出$k$的值；若不存在，请说明理由。

证. $k=2$符合题意。设$Q(x_0,y_0)$，我们有$A(-a,0)$, $c=2a$, $F_2(2a,0)$。

$$\begin{aligned}\tan\angle QAF_2=\frac{y_0}{x_0+a},\qquad \tan\angle QF_2A=\frac{y_0}{c-x_0}=\frac{y_0}{2a-x_0},\qquad \tan2\angle QAF_2=\frac{2y_0/(x_0+a)}{1-y_0^2/(x_0+a)^2}\\=\frac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-3(x_0^2-a^2)}=\frac{2y_0}{x_0+a-3(x_0-a)}=\frac{y_0}{2a-x_0}=\tan\angle QF_2A,\end{aligned}$$

所以$\angle QF_2A=2\angle QAF_2$恒成立。 □

例 2.2. 过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$上的定点$A(a,b)$引抛物线的两条弦AP,AQ。求证：$AP\perp AQ$的充要条件是直线PQ过定点$M(2p+a,-b)$ ①。

证. 已知$b^2=2pa$，设$AP:y-b=k_1(x-a)$, $AQ:y-b=k_2(x-a)$。AP与$y^2=2px$联立，得$y^2=2p(\dfrac{y-b}{k_1}+a)=2p\dfrac{y-b}{k_1}+b^2$, $(y+b)(y-b)=\dfrac{2p}{k_1}(y-b)$，于是$y_P=\dfrac{2p}{k_1}-b$。同理，$y_Q=\dfrac{2p}{k_2}-b$。

$$\begin{aligned}AP\perp AQ\iff k_1k_2=1,\qquad ②\qquad PQ\text{过点}M\iff\frac{y_P+b}{x_P-2p-a}=\frac{y_Q+b}{x_Q-2p-a}\\\iff0=y_Px_Q-y_Qx_P+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(x_Q-x_P)\\=y_Py_Q\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}+(2p+a)(y_Q-y_P)+b(y_Q+y_P)\cdot\frac{y_Q-y_P}{2p}\\\iff0=y_Py_Q+2p(2p+a)+b(y_P+y_Q)\iff(y_P+b)(y_Q+b)=-4p^2,\qquad ③\end{aligned}$$

因为$y_P+b=\dfrac{2p}{k_1}$, $y_Q+b=\dfrac{2p}{k_2}$，所以②式$\iff$③式，命题①成立。 □

例 2.3. 已知l是过椭圆$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上一动点$P$的椭圆的切线。过椭圆左焦点$F_1$作$l$的垂线，求垂足的轨迹方程。

证. 法一：设$P(x_0,y_0)$，则$F_1(-2,0)$, $l:\dfrac{x_0x}{16}+\dfrac{y_0y}{12}=1$，$l$的斜率为$k=-\dfrac{x_0/16}{y_0/12}=-\dfrac{3x_0}{4y_0}$。所以$F_1A:y=\dfrac{4y_0}{3x_0}(x+2)$，与$l$联立：$3x_0x+4y_0y=48$, $-4y_0x+3x_0y=8y_0$。设$x_0=4\cos\alpha$, $y_0=2\sqrt{3}\sin\alpha$，用x_0,y_0表示x,y，解得$x=\dfrac{4(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$, $y=\dfrac{4\sqrt{3}\sin\alpha(2+\cos\alpha)}{3+\sin^2\alpha}$。下面证明$x^2+y^2=16$，即$(3\cos\alpha-2\sin^2\alpha)^2+3\sin^2\alpha(2+\cos\alpha)^2=(3+\sin^2\alpha)^2$。

法二：联立$3xx_0+4yy_0=48$, $3yx_0-(4x+8)y_0=0$。用x,y表示x_0,y_0，解得$x_0=\dfrac{16(x+2)}{x^2+y^2+2x}$, $y_0=\dfrac{12y}{x^2+y^2+2x}$。代入$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，得$16(x+2)^2+12y^2=(x^2+y^2+2x)^2$，设$s=x^2+y^2$，我们有$s^2+4sx+4x^2=12s+64x+4x^2+64$, $0=s^2+4sx-12s-64x-64=(s-16)(s+4x+4)=(x^2+y^2-16)[(x+2)^2+y^2]$。

法三： □

例 2.4. 设F_1,F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l_1,l_2$是该椭圆过椭圆外一点$P$的两条切线，切点分别为$T_1,T_2$。求证：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$。

证. □

例 2.5. 已知抛物线外任意一点P，过P作PA,PB切抛物线于A,B，抛物线的焦点为F，连接PF,FA,FB，求证：$\angle AFP=\angle BFP$。

证. □

例 2.6. 已知双曲线外一点P，过P作PA,PB切双曲线于A,B，设F_1,F_2为双曲线的两焦点，连接PF_1,PF_2，AF_1,AF_2,BF_1,BF_2。求证：（1）若A,B在双曲线的同一支上，则$\angle AF_1P=\angle BF_1P$, $\angle AF_2P=\angle BF_2P$；（2）若$A,B$在双曲线的两支上，则$\angle AF_1P+\angle BF_1P=\pi$, $\angle AF_2P+\angle BF_2P=\pi$。

证. □

例 2.7. 一张纸上画有半径为R的圆O和圆内一定点A，且$OA=a$。折叠纸片，使圆周上某一点A'刚好与A点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕。当A'取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合。

证. □

例 2.8. 已知斜率为1的直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$相交于$B,D$两点，且$BD$的中点为$M(1,3)$。（1）求$C$的离心率；（2）设$C$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$|DF|\cdot|BF|=17$。求证：过$A,B,D$三点的圆与$x$轴相切。

证. （1）法一：$l:y=x+2$，与双曲线方程联立，得

$$x^2\cdot(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})-\frac{4x}{b^2}-1-\frac{4}{b^2}=0,\qquad 2=x_B+x_D=\frac{4/b^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}},\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{2}{b^2},$$

解得$b=\sqrt{3}a$, $c=2a$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=2$。

法二（点差法）：$\dfrac{(x_B+x_D)(x_B-x_D)}{a^2}-\dfrac{(y_B+y_D)(y_B-y_D)}{b^2}=0$, $\dfrac{x_M}{a^2}-\dfrac{y_M}{b^2}\cdot k_{BD}=0$，所以$\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{3}{b^2}=0$, $b=\sqrt{3}a$, $c=2a$, $e=2$。

（2）由双曲线的第二定义，$|DF|=\frac{c}{a}|x_D-\frac{a^2}{c}|=|2x_D-a|$, $|BF|=\frac{c}{a}|x_B-\frac{a^2}{c}|=|2x_B-a|$。又因为$l$与双曲线方程联立为$x^2\cdot(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{3a^2})-\frac{4x}{3a^2}-1-\frac{4}{3a^2}=0$，即$2x^2-4x-3a^2-4=0$，所以由韦达定理，

$$\begin{aligned}17&=|DF|\cdot|BF|=|(2x_D-a)(2x_B-a)|=|4x_Bx_D-2a(x_B+x_D)+a^2|\\&=|2\cdot(-3a^2-4)-2a\cdot 2+a^2|=|-5a^2-4a-8|,\qquad \text{因为}17=-5a^2-4a-8\text{无解，}\end{aligned}$$

所以$17=5a^2+4a+8$, $0=5a^2+4a-9=(a-1)(5a+9)$, $a=1$。此时$A(1,0)$, $(x_B-x_D)^2=(x_B+x_D)^2-4x_Bx_D=4-4\cdot\frac{-3a^2-4}{2}=18$, $|x_B-x_D|=3\sqrt{2}$。所以$BM=DM=AM=3$，M是$\triangle ABD$的外心，$MA\perp x$轴，$\odot M$与x轴相切。 □

例 2.9. 设F_1,F_2是椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l$是该椭圆的一条切线，$H_1,H_2$分别是$F_1,F_2$在$l$上的垂足。求证：$|F_1H_1|\cdot|F_2H_2|=b^2$。

证. 法一：$l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, $d(F_1,l)=\frac{|-\frac{x_0c}{a^2}-1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{|a^2+x_0c|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2y_0^2}{b^4}}}$。同理，$d(F_2,l)=\frac{|a^2-x_0c|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2y_0^2}{b^4}}}$，

$d(F_1,l)d(F_2,l)=\frac{|a^2+x_0c||a^2-x_0c|}{a^2(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2y_0^2}{b^4})}=\frac{|a^4-x_0^2c^2|}{x_0^2+\frac{a^4}{b^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}}=\frac{a^4-x_0^2c^2}{x_0^2+\frac{a^4}{b^2}\cdot(1-\frac{x_0^2}{a^2})}=\frac{a^4-x_0^2c^2}{\frac{1}{b^2}[a^4-x_0^2(a^2-b^2)]}=b^2$。

法二：设l与Γ切于点P，F_1,F_2关于l的对称点分别为B,C，则由椭圆的光学性质，B,P,F_2三点共线，C,P,F_1三点共线。 □

3 代数选讲-2

例 3.1. 设a,b,c是非负实数，满足$a+b+c=3$。求证：$(1+a^2b)(1+b^2c)(1+c^2a)\le 5+3abc$ ①。

分析：注意到①式有两种取等条件，$a=b=c=1$或$(a,b,c)=(2,1,0)$及其轮换。作为不对称的轮换不等式，①式展开后和$\sum a^2b$, abc, $\sum ab^2$有关，我们可以用舒尔不等式将后者化为前两者。

证. 法一：①式$\iff\sum a^2b+abc(\sum ab^2)+(abc)^3\le 4+3abc,$ ②

$$\begin{aligned}&\text{由舒尔不等式，}27-4\sum a^2b-4\sum ab^2-3abc\ge 0,\qquad \sum ab^2\le\frac{27}{4}-\sum a^2b-\frac{3}{4}abc,\\&\text{②式左边}-\text{右边}\le\frac{27}{4}abc+(1-abc)\sum a^2b-\frac{3}{4}(abc)^2+(abc)^3-4-3abc\\&=abc[\frac{15}{4}-\frac{3}{4}abc+(abc)^2]+(1-abc)\sum a^2b-4,\qquad ③\end{aligned}$$

因为$0\le abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3=1$，所以$\frac{15}{4}-\frac{3}{4}abc+(abc)^2\le\frac{15}{4}-\frac{3}{4}+1=4$。下面证明$\sum a^2b\le 4$ ④。不妨设$\sum a^2b-\sum ab^2=(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$，否则将$b,c$对调能使$\sum a^2b$增加。不妨设$a$是$a,b,c$中最大者，则$a\ge b\ge c$，我们证明$a^2b+b^2c+c^2a\le(a+\frac{c}{2})^2(b+\frac{c}{2})$ ⑤。

$$\text{⑤式右边}-\text{左边}=abc+\frac{a^2c+ac^2}{2}+\frac{bc^2+c^3}{4}-b^2c-ac^2=c(\frac{a^2-ac}{2}+ab-b^2+\frac{bc+c^2}{4})\ge 0,$$

所以⑤式成立，只需证明④式中$c=0$的情形。此时$a^2b=4(\frac{a}{2})^2b\le 4[\frac{1}{3}(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b)]^3=4$，④式得证。于是③式右边$\le abc\cdot 4+(1-abc)\cdot 4=4$。

法二：我们证明$\sum a^2+abc\le 4$。有两种取等条件，$a=b=c=1$或$(a,b,c)=(2,1,0)$及其轮换。 □

例 3.2. 正实数x,y,z满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$。求证：$(x-1)(y-1)(z-1)\le\frac{1}{4}(xyz-1)$ ①。

证. 因为$\sum xy=3xyz$，所以①式$\Longleftrightarrow \frac{3}{4}xyz-\sum xy+\sum x\le\frac{3}{4}\Longleftrightarrow \sum x\le\frac{3}{4}+\frac{3}{4}xy$ ②。设$a=\frac{1}{x}$，$b=\frac{1}{y}$，$c=\frac{1}{z}$，则$a+b+c=3$，

$$\begin{aligned}②式 &\Longleftrightarrow \sum\frac{1}{a}\le\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sum\frac{1}{ab}\Longleftrightarrow 4\sum ab\le 3abc+3\sum a=3abc+\sum a^2+2\sum ab\\&\Longleftrightarrow 0\le(\sum a^2-2\sum ab)(\sum a)+9abc=\sum a^3-\sum a^2b-\sum ab^2+3abc,\end{aligned}$$

由舒尔不等式知上式成立，于是②，①式成立。 □

例 3.3. 设n为正整数，$x_1,x_2,...,x_n\ge 0$，且$x_1+x_2+...+x_n=1$。设$F=\sum_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)\sqrt{x_ix_j}$。

（1）$n\le 4$时，求证：F的最大值为$1-\frac{1}{n}$；

（2）$n\ge 5$时，求证：$F\le\frac{n+8}{16}$，$n=5$时可以取等；

（3）$n=7$时，求证：F的最大值为$\frac{14}{15}$；

（4）对任意的$n\ge 5$，求F的最大值。

证. （1）$n\le 4$时，由拉格朗日恒等式，

$$\begin{aligned}F&=(\sum x_i^{\frac{3}{2}})(\sum\sqrt{x_i})-\sum x_i^2=1+\sum_{i<j}\sqrt{x_ix_j}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^2-\frac{1}{n}[1+\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2]\\&=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i<j}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j})^2[(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_j})^2-n\sqrt{x_ix_j}]\le 1-\frac{1}{n},\end{aligned}$$

（2） □

例 3.4. 求最小的实数c，使得对任意正整数$x\ne y$，都有$\min\{\{\sqrt{x^2+2y}\},\{\sqrt{y^2+2x}\}\}<c$。

证. □

例 3.5. 求证：对任意无理数x，都存在无穷多个正整数n，使得$\{x\}$，$\{2x\},...,\{nx\}$均大于$\frac{1}{n+1}$。

证. □

例 3.6. 设$x_1,x_2,...,x_n$为实数，求证：$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j|\ge n\sum_{i=1}^{n}|x_i|$。

证. □

例 3.7. 在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$$\cos^2A\cos^2B+\cos^2B\cos^2C+\cos^2C\cos^2A\le\frac{1}{4}(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C),\qquad ①$$

证. □

例 3.8. 正实数x, y, z满足$xyz = x + y + z + 2$。求证：$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \le x + y + z + 6$。

证. □

例 3.9. 正实数x, y, z满足$xyz = x + y + z + 2$。求证：$xyz(x-1)(y-1)(z-1) \le 8$。

证. □

例 3.10. 正实数x, y, z满足$xy + yz + zx + xyz = 4$。求证：$x + y + z \ge xy + yz + zx \quad ①$。

证. 存在正实数a, b, c使得$x = \dfrac{2a}{b+c}$，$y = \dfrac{2b}{c+a}$，$z = \dfrac{2c}{a+b}$。

$$①\text{式} \Longleftrightarrow \sum \frac{2a}{b+c} \ge \sum \frac{4ab}{(a+c)(b+c)} \Longleftrightarrow \sum 2a(a+b)(a+c) \ge \sum 4ab(a+b),$$

由舒尔不等式，上式左边$-$右边$= 2\sum a^3 + 2\sum ab(a+b) + 6abc - 4\sum ab(a+b) = 2\sum a(a-b)(a-c) \ge 0$。所以①式成立。 □

例 3.11. 给定正实数a, b, c，求所有三元正实数组(x, y, z)，满足$x + y + z = a + b + c$，$a^2x + b^2y + c^2z + abc = 4xyz$。

证. □

例 3.12 (牛顿迭代)**.** 设$a > 0$，$f(x) = x^2 - a$，$f'(x) = 2x$。给定初值$x_0 \ne 0$，$n \ge 0$时，$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{a}{2x_n}$。求数列$\{x_n\}_{n\ge 0}$的通项。

解. $x_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \dfrac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$，同理，$x_{n+1} + \sqrt{a} = \dfrac{(x_n + \sqrt{a})^2}{2x_n}$。于是

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = (\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}})^2 = ... = (\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}})^{2^{n+1}}, \qquad \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = (\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}})^{2^n},$$
$$x_n[(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}] = \sqrt{a}[(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}],$$

所以$x_n = \dfrac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}$。 □

例 3.13. 非负实数x, y, z满足$x + y + z = 1$。求证：$\sqrt{9 - 32xy} + \sqrt{9 - 32xz} + \sqrt{9 - 32yz} \ge 7 \quad ①$。

分析：不难发现，本题有两种轮换意义下不同的取等条件，即$x = y = z = \dfrac{1}{3}$和$x = y = \dfrac{1}{2}$，$z = 0$，而且题中的根式很不友好。我们先给出一种考察函数凹凸性并作调整的做法，再给出一种构造稍微复杂的局部不等式的做法。

证. 法一：不妨设$x \ge y \ge z$，设①式左边$= F(x, y, z)$。我们试图证明，对固定的$x \in [\dfrac{1}{3}, 1]$，$F(x, y, z)$的最小值在$y = z$或$y - z$最大时取到。设$t = \dfrac{y-z}{2}$，则$\dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y+z}{2}$，$y = \dfrac{1-x}{2} + t$，$z = \dfrac{1-x}{2} - t$。设$A = \sqrt{9 - 32xy}$，$B = \sqrt{9 - 32xz}$，$C = \sqrt{9 - 32yz}$，将$x$看作常数，$A, B, C$看作关于$t$的函数，我们有：

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{16x}{A}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{16x}{B}, \qquad C = \sqrt{9 - 8(y+z)^2 + 8(y-z)^2}$$

$$= \sqrt{9-8(1-x)^2+32t^2}, \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{32t}{C}, \qquad \text{所以}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} = 16x(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}) + \frac{32t}{C}, \qquad ②$$

$$\text{因为}A^2 - B^2 = -64xt, \qquad \text{所以}\frac{1}{B} - \frac{1}{A} = \frac{A^2-B^2}{AB(A+B)} = \frac{-64xt}{AB(A+B)},$$

$$②\text{式右边} = 16x \cdot \frac{-64xt}{AB(A+B)} + \frac{32t}{C} = 32t(-\frac{32x^2}{AB(A+B)} + \frac{1}{C}),$$

$x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$时，$t$的取值范围为$[0, \frac{3x-1}{2}]$。$x \in [\frac{1}{2}, 1]$时，$t$的取值范围为$[0, \frac{1-x}{2}]$。设$t_{\max} = \min\{\frac{3x-1}{2}, \frac{1-x}{2}\}$，$f(t) = F(x, y(x,t), z(x,t))$，则$f(t)$是闭区间$[0, t_{\max}]$上的光滑函数，必然存在$t_0 \in [0, t_{\max}]$使得$f(t_0)$是$f$在闭区间$[0, t_{\max}]$上的最小值。下面证明$t_0 \in \{0, t_{\max}\}$。

法二：设$F(y,z) = \sqrt{9-32yz}$，我们尝试用待定系数法作四次函数$G(y,z) = P(y^4+z^4) + Qyz(y^2+z^2) + A(y^3+z^3) + Byz(y+z) + C(y^2+z^2) + Dyz + E(y+z) + K$，使得局部不等式$F(y,z) \geq G(y,z)$成立，且$G(x,y) + G(y,z) + G(z,x) = 7$。观察等号成立条件知$G$的系数应满足下列方程组：

$$G(\frac{1}{2}, 0) = 3 = \frac{P}{16} + \frac{A}{8} + \frac{C}{4} + \frac{E}{2} + K, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 = \frac{P}{2} + \frac{3A}{4} + C + E,$$

$$G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 = \frac{P+Q}{8} + \frac{A+B}{4} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4} + E + F,$$

$$G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{7}{3} = \frac{2(P+Q)}{81} + \frac{2(A+B)}{27} + \frac{2C+D}{9} + \frac{2E}{3} + K,$$

□

4 三角形的五心-2

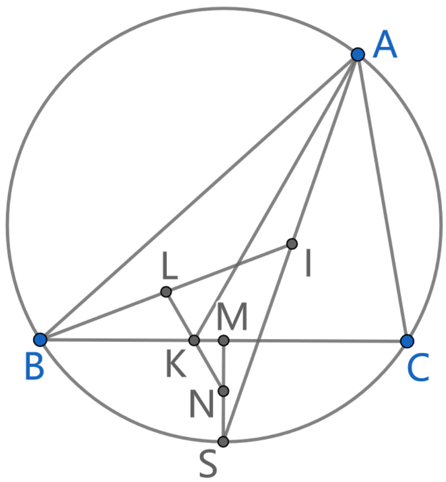
例 4.1. 点I是$\triangle ABC$的内心，S是$\odot(ABC)$的弧BC的中点。点L, M, N分别是线段BI, BC, MS的中点，LN与BC相交于K。求证：$\angle AKL = \angle BKL$。

证. 因为$SB = SI$，L是BI中点，所以$\angle SLB = \frac{\pi}{2} = \angle SMB$，$B, L, M, S$四点共圆，$\angle LSM = \angle LBM = \angle ABI$，$\angle SLM = \angle SBM = \frac{A}{2} = \angle BAI$，所以$\triangle SLM \backsim \triangle BAI$，$N, L$是该相似中的对应点，所以$\angle SLN = \angle BAL$，$\angle ALN = \angle ILS - \angle SLN + \angle ALI = \frac{\pi}{2} + \angle ALI - \angle BAL = \frac{\pi+B}{2}$。设$\angle BAL = \alpha$，$\angle BKL = \beta$，$\angle KAL = \alpha'$，$\angle AKL = \beta'$，则$\alpha + \beta = \angle ALK - B = \frac{\pi - B}{2} = \pi - \angle ALK = \alpha' + \beta'$，$d(L, AB) = d(L, BC) = \frac{r}{2}$，$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{LK}{LA} = \frac{r}{2LA} \Big/ \frac{r}{2LK} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，所以$\alpha = \alpha'$，$\beta = \beta'$，$\angle AKL = \angle BKL$。 □

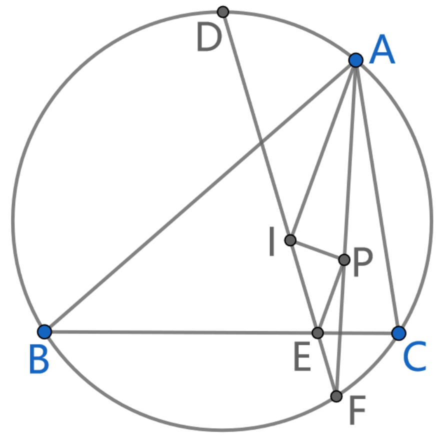
例 4.2. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心。点D是ω上的弧BAC的中点，延长DI分别交BC和ω于E, F。点P在AF上，$EP /\!/ AI$。求证：$PI \perp AI$。

证. 法一：设AI交ω于S点，$\angle IAF = \angle IDS = \alpha$，则 $PI \perp AI \iff AI = AP\cos\alpha$ ①，因为$EP /\!/ AI$，$\angle IEB = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以$AP = IE \cdot \frac{AF}{IF} = \frac{r}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha + \frac{C-B}{2})}{\sin\alpha}$。因为$\frac{r}{AI} = \sin\frac{A}{2}$，所以

$$①\text{式} \iff 1 = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin(\alpha + \frac{C-B}{2})}{\sin\alpha} \iff \sin\alpha(1 - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}) = \cos\alpha\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}, \qquad ②$$



例1



例2

设$IU \perp DS$于U点，则$IU = \dfrac{c-b}{2}$，$DU = d(D, BC) - r = 2R\cos^2\dfrac{A}{2} - 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{IU}{DU} = \frac{\sin C - \sin B}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})\\ &= \sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}\Big/(\cos^2\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}(\cos\frac{C-B}{2} - \cos\frac{C+B}{2})) = \frac{\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}},\end{aligned}$$

所以②式，①式成立，$PI \perp AI$。

法二：因为$\triangle AFI \backsim \triangle DSI$，$IS = IB = 2R\sin\dfrac{A}{2}$，所以$AP\cos\alpha = \dfrac{AF}{IF}\cdot EI\cos\alpha = \dfrac{DS}{IS}\cdot r = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}} = AI$，①式成立。 □

例 4.3. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别切BC, CA, AB于点D, E, F。点K在$\odot I$上，$DK \perp EF$。延长AI交$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$于S，点T是S关于I的对称点。过A, E, F三点作圆交$\odot O$于P（$P \neq A$）。过I, P, T三点作圆ω，点X是ω的圆心且$X \neq K$。求证：XK与$\odot I$相切。

证. 设AI中点为N，A'为A在$\odot O$中的对径点，则$AEIFP$五点共圆，圆心为N。A与P关于ON对称，$\angle API = \dfrac{\pi}{2} = \angle APA'$，所以$PIA'$三点共线。设$\angle AIP = \angle SIA' = \gamma$，则$\angle XIT = \dfrac{\pi}{2} - \angle IPT$，$\angle KIT = \angle IKD = \angle OAS = \dfrac{B-C}{2}$。设$\angle IPT = \beta$，则$\angle XIK = \dfrac{\pi}{2} - \beta - \dfrac{B-C}{2}$，

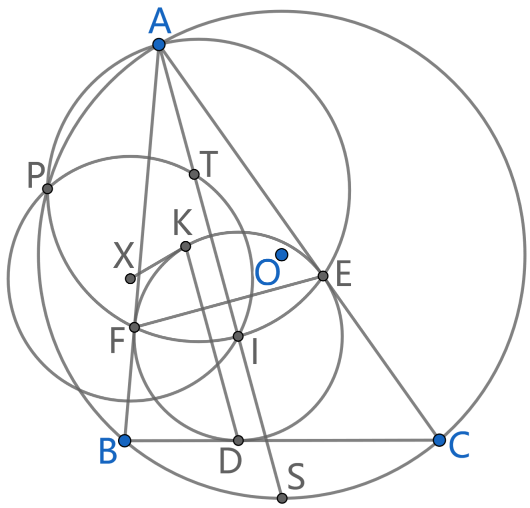
$$XK\text{与}\odot I\text{相切} \iff XK \perp IK \iff r = IX\cos\angle XIK = IX\sin(\beta + \frac{B-C}{2}), \qquad ①$$

设$TU \perp IP$于U，。 □

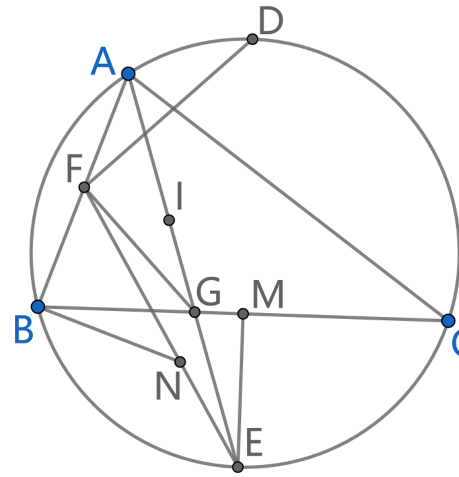
例 4.4 (2018，高联A卷)**.** $\triangle ABC$为锐角三角形，$AB < AC$，M是BC的中点。D, E分别是$\triangle ABC$的外接圆上弧BAC和弧BC的中点。F是$\triangle ABC$的内切圆与AB的切点。AE, BC相交于G，点N在EF上，$BN \perp AB$。求证：若$BN = EM$，则$DF \perp FG$。

证. 法一：因为$\angle DAG = \angle DMG = \dfrac{\pi}{2}$，所以$A, D, M, G$四点共圆,

$$DF \perp FG \iff A, F, M, D\text{四点共圆} \iff \angle ADM = \angle BFM, \qquad ①$$



例3



例4

因为$\angle ADM = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}$，$\angle NBE = B + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{B-C}{2} = \angle MEI$，$BN = EM$，$BE = EI$，所以

$$\triangle NBE \backsim \triangle MEI, \qquad \angle IMB = \angle IME - \frac{\pi}{2} = \angle BNE - \frac{\pi}{2} = \angle BFN, \qquad ②$$

$$\tan\angle IMB = r\Big/\frac{b-c}{2} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R(\sin B - \sin C)} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}},$$

因为$BF = p - b = BE\cdot 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，所以

$$\tan\angle BFE = \frac{BE\sin(B+\frac{A}{2})}{BF + BE\cos(C+\frac{A}{2})} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

由②式知

$$\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad \frac{\sin(B-C)}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \qquad ③$$

$$\cot\angle BFM = \frac{BF - BM\cos B}{BM\sin B} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - R\sin A\cos B}{R\sin A\sin B} = \frac{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2}\cos B}{\cos\frac{A}{2}\sin B}, \qquad ④$$

$$①\text{式} \iff ④\text{式右边} = \tan\frac{B-C}{2} \iff (\sin\frac{C-B}{2} + \cos\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\cos B)\cos\frac{B-C}{2}$$
$$= \cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2} \iff 0 = (\sin\frac{C-B}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2})\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin B\sin\frac{B-C}{2}, \qquad ⑤$$

由③式，我们有

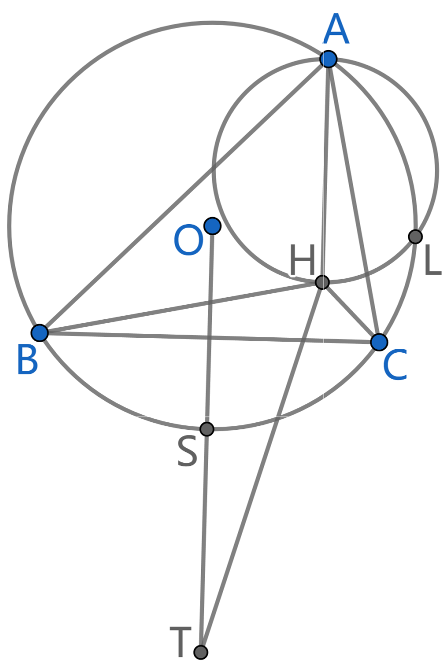
$$⑤\text{式右边} = \frac{\sin(C-B)}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2})$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{\sin(B-C)}{2} = 0,$$

所以⑤式成立，①式成立，$DF \perp FG$。

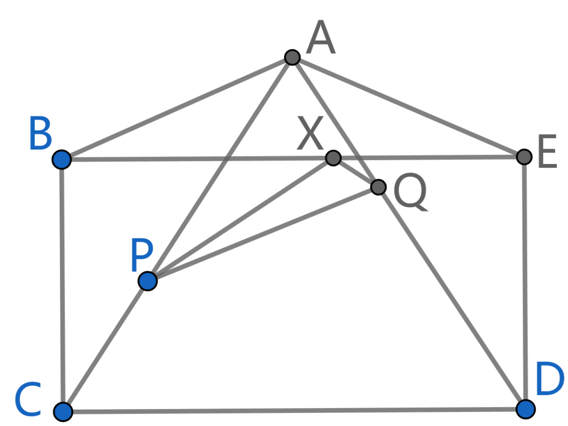
法二：。 □

例 4.5. H是非等腰锐角$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，以AH为直径的圆与$\odot O$相交于A, L。点S是弧BC的中点，$\angle BHC$的平分线与直线OS相交于T。求证：L, H, S, T四点共圆。

证. 设N为AH中点，M为BC中点，$\odot D$中A的对径点为D，S的对径点为U，因为$\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH}{AN} = 2$，所以$DH \parallel ON$，$\angle AHD = \angle ANO = \pi - \dfrac{\angle ANL}{2} = \pi - \angle AHL$，$P, A, L$三点共线。因为$M$是$HD$中点，所以$HL$与$ST$交于$M$，因为$\dfrac{HT}{\sin\angle HBT} = \dfrac{BT}{\sin\angle BHT} = \dfrac{CT}{\sin\angle CHT} = \dfrac{HT}{\sin\angle HCT}$，所以$\sin\angle HBT = \sin\angle HCT$，又因为$AB \neq AC$，所以$HB \neq HC$，$\angle HBC \neq \angle HCB$，$\angle HBT \neq \angle HCT$，由①式知$\angle HBT + \angle HCT = \pi$，所以$B, H, C, T$四点共圆，因为$\triangle BHC$外接圆与$\triangle ABC$外接圆关于$BC$对称，所以$T, U$关于$BC$对称，$MS \cdot MT = MS \cdot MU = MD \cdot ML = MH \cdot ML$，所以$L, H, S, T$四点共圆。 □



例5



例6

例 4.6. 在凸五边形$ABCDE$中，$AB = BC = AE$，四边形$BCDE$是矩形，点P, Q分别在线段AC, AD上，$AP = DQ$。点X是$\triangle APQ$的垂心。求证：B, X, E三点共线。

证. 设BE中点为O，以O为原点，OE为x轴正方向建立直角坐标系。因为$AB = AE$，所以$AO \perp BE$，设$A(0,a), B(-b,0), E(b,0), C(-b,-c), D(b,-c)$，$a, b, c > 0$。因为$AB = BC$，所以$a^2 + b^2 = c^2$。

$$AD : y - a = -\frac{a+c}{b} \cdot x, \qquad AC : y - a = \frac{a+c}{b} \cdot x,$$

设PX交BE于U，QX交BE于V，则

$$PX : y - y_P = (x - x_P) \cdot \frac{b}{a+c}, \qquad QX : y - y_Q = (x - x_Q) \cdot (-\frac{b}{a+c}),$$
$$x_U = -y_P \frac{a+c}{b} + x_P, \qquad x_V = y_Q \cdot \frac{a+c}{b} + x_Q$$

因为$AP = DQ$，所以$x_Q - x_P = b$, $y_P + y_Q = a - c$,

$$x_V - x_U = \frac{a+c}{b}(y_P + y_Q) + x_Q - x_P = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{b} = 0,$$

所以U, V, X重合，B, X, E三点共线。 □

例 4.7. 非等腰锐角$\triangle ABC$（$AB > AC$）内接于$\odot O$，NS是$\odot O$的直径，$NS \perp BC$，点N和A在BC的同侧。H是$\triangle ABC$的垂心，直线SH与$\odot O$相交于S, P两点。点K在直线AB上，$NK /\!/ AC$。求证：$\angle KPN = \frac{1}{2}\angle BAC$。

证. 因为$\angle NVK = A$, $\angle NAK = \dfrac{B+C}{2} = \angle ANK$, $\angle ASN = \dfrac{C-B}{2}$，所以

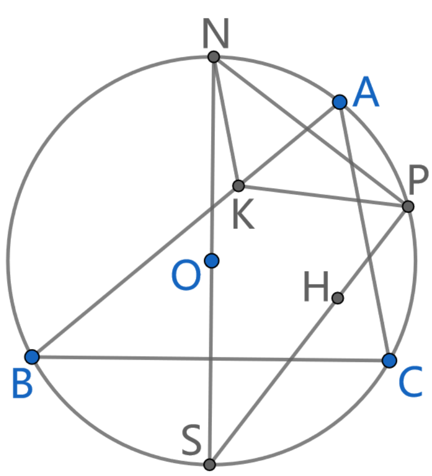
$$AN = 2R\sin\frac{B-C}{2},\ AK = NK = \frac{AN}{2\cos\angle NAK} = \frac{R\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

设D为$\odot O$中C的对径点，则$AD = 2R\cos B$, $\angle DAK = \dfrac{\pi}{2} - A$, $AS = 2R\cos\dfrac{C-B}{2}$, $AH = 2R\cos A$, 我们证明$\angle ADK = \angle ASH$ ①。

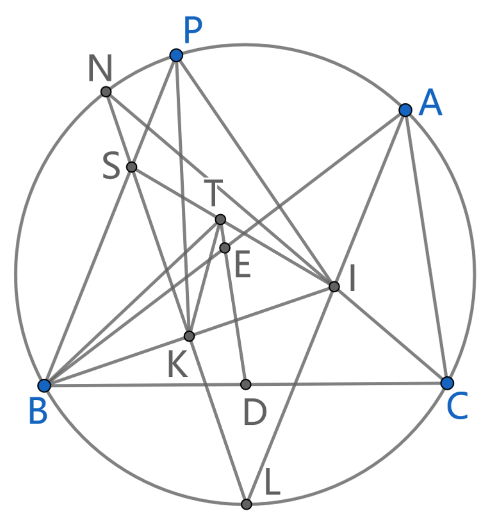
$$\tan\angle ADK = \frac{AK\sin\angle DAK}{AD - AK\cos\angle DAK} = \frac{\sin\frac{C-B}{2}\cos A/\sin\frac{A}{2}}{2\cos B - 2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{A}{2}}, \qquad ②$$

$$\tan\angle ASH = \frac{AH\sin\angle SAH}{AS - AH\cos\angle SAH} = \frac{\cos A\cdot\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2} - \cos A\cos\frac{C-B}{2}} = \frac{\cos A\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}}, \qquad ③$$

D, K, P三点共线，$\angle KPN = \angle DPN = \dfrac{A}{2}$。 □



例7



例8

例 4.8. $\triangle ABC$内接于圆ω，点I是$\triangle ABC$的内心，K是线段BI的中点。点L, N分别是弧BC和弧AB的中点，点D, E分别是线段BC, AB的中点。点P在ω上，直线BP, NL相交于S，直线IS, DE相交于T。求证：$\angle BTK = \angle IPK$。

证. 设$\angle NBP=\alpha$，DE交IB于点F。因为I,B关于NL对称，所以$\angle NIS=\angle NBS=\alpha$，$\angle NIB=\angle NBI=\dfrac{B+C}{2}$，$\angle TIF=\dfrac{B+C}{2}-\alpha$，$\angle TFI=\angle BEF+\angle IBE=A+\dfrac{B}{2}$，$\angle ITF=\pi-\angle TIF-\angle TFI=\dfrac{C}{2}+\alpha$，

$$IT=IF\cdot\frac{\sin(A+\frac{B}{2})}{\sin(\frac{C}{2}+\alpha)}\qquad ①,\qquad IF\sin(A+\frac{B}{2})=d(I,DE)=\frac{d(B,AC)}{2}-r=R\sin A\sin C$$
$$-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2})=4R\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2},$$
$$BP=2R\sin(\frac{C}{2}+\alpha),\qquad BI=2IK=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

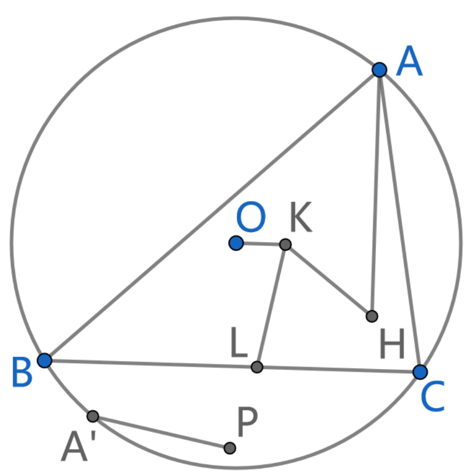
由①式，$IT\cdot BP=8R^2\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}=BI\cdot IK$。又因为$\angle PBI=\angle KIT$，所以$\triangle PBI\backsim\triangle KIT$。设$\angle BTK=\gamma$，$\angle TBK=\beta$，$\angle IPK=\gamma'$，$\angle BPK=\beta'$，则$\gamma+\beta=\angle TKI=\angle IPB=\gamma'+\beta'\in(0,\pi)$，

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{TK}{BK}=\frac{TK}{KI}=\frac{IP}{PB}=\frac{BK}{KI}\cdot\frac{IP}{PB}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'},$$

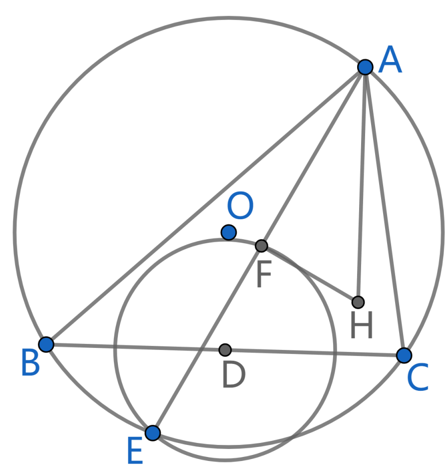
所以$\gamma=\gamma'$，$\beta=\beta'$，$\angle BTK=\angle IPK$。 □

例 4.9. $\triangle ABC$内接于$\odot O$，点H是$\triangle ABC$的垂心，AA'是$\odot O$的直径。点P是$\triangle BOC$的外心，点K是$\triangle AOH$的垂心。点L在直线BC上，$LO=LH$。求证：$KL\perp PA'$。

证. 设D,E分别为O,H到BC边的投影，N为OH中点，由$LO=LH$知$LN\perp OH$，所以O,N,D,L四点共圆，H,N,L,E四点共圆。设$\odot N$为$\triangle ABC$的九点圆，U为AH中点，则D,U为$\odot N$中的对径点，$OD=R\cos A=AU$，$OD/\!/AU$，所以四边形$AODU$为平行四边形。$\angle OAH=\angle ODN=\angle OLN=\dfrac{1}{2}\angle OLH$，$\angle OKH=\pi-\angle OAH=\pi-\dfrac{1}{2}\angle OLH$，所以$K$在以$L$为圆心，$OL$为半径的圆上，$LK=LO=LH$。因为$OA'=R$，$OP=\dfrac{OB}{2\sin\angle OCB}=\dfrac{R}{2\cos A}$，$AH=2R\cos A$，所以$\dfrac{OP}{OA'}=\dfrac{AO}{AH}$，$\angle HAO=\angle A'OP$，于是$\triangle HAO\backsim\triangle A'OP$。设$LQ$为$\angle KLO$的平分线，则$\angle A'PO+\angle KLQ=\angle AOH+\angle KHO=\dfrac{\pi}{2}$，所以$KL\perp A'P$。 □



例9



例10

例 4.10. H是$\triangle ABC$的垂心，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆。点D是线段BC的中点。以D为圆心作$\odot D$。点E是$\odot O$与$\odot D$的一个交点，AE交$\odot D$于F（异于E）。求证：$HF\perp AF$。

证. 由中线长公式, $AD^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$, $DE^2=\dfrac{BE^2+CE^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$, 设$\angle EAH=\alpha$, 则$HF\perp AF\iff AF=AH\cos\alpha$ ① 因为$AF=\dfrac{AD^2-DE^2}{AE}$, 所以①式$\iff AD^2-DE^2=AE\cdot AH\cos\alpha$ ②。因为$\angle CAE=\dfrac{\pi}{2}-C+\alpha$, $\angle BAE=\dfrac{\pi}{2}-B-\alpha$, 所以

$$②式左边=\frac{1}{2}(b^2+c^2-BE^2-CE^2)=2R^2(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2(\frac{\pi}{2}-B-\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-C+\alpha)),$$

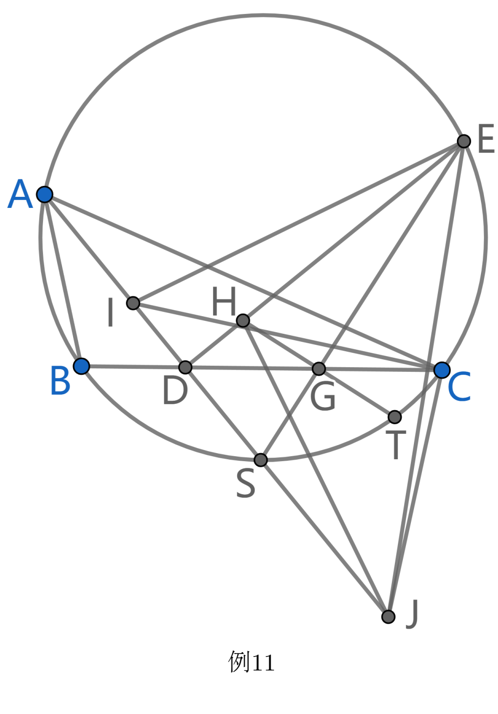
因为$\angle ABE=\alpha+\dfrac{\pi}{2}+B-C$, $AH=2R\cos A$, $AE=2R\sin\angle ABE$, 所以②式右边 $=4R^2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2}+B-C)\cos A\cos\alpha$, ②式 $\iff\sin^2B+\sin^2C-\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-B-\alpha)-\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-C+\alpha))=2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2}+B-C)\cos A\cos\alpha$ ③。因为$\sin^2x-\sin^2y=\dfrac{\cos 2y-\cos 2x}{2}=\sin(x+y)\sin(x-y)$, 所以

$$③式左边=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(2B+\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(2C-\alpha-\frac{\pi}{2})$$
$$=\cos\alpha(\sin(2B+\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(2C-\alpha-\frac{\pi}{2}))=2\cos\alpha\sin(B+C-\frac{\pi}{2})\cos(B-C+\alpha)=③式右边,$$

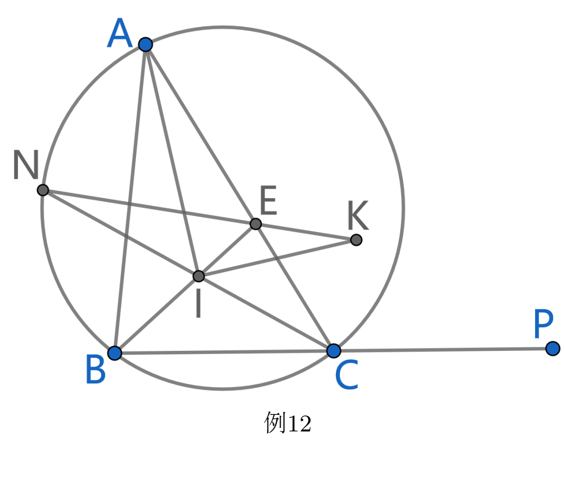
于是②式, ①式成立, $HF\perp AF$。 □

例 4.11. $\triangle ABC$内接于圆ω, 点I,J分别是$\triangle ABC$的内心和A-旁心, IJ与BC,ω分别交于D和S。点E在ω上, $DE\perp IJ$, 线段ES,BC相交于G。H是$\triangle EIJ$的垂心, 延长HG与ω相交于T。求证: G是TH的中点。

证. 因为$\angle SBG=\dfrac{A}{2}=\angle SEB$, 所以$\triangle SBG\backsim\triangle SEB$, $IS^2=BS^2=Sg\cdot ES=ES^2-EG\cdot ES$。设$JH$交$EI$于$U$, 因为$\angle IUH=\angle IDH=\dfrac{\pi}{2}$, 所以$I,U,H,D$四点共圆。 □



例11



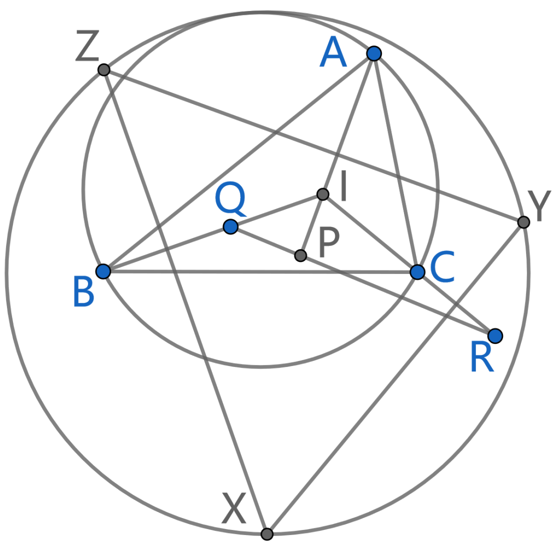
例12

例 4.12. 点I是$\triangle ABC$的内心, 直线BI,AC相交于E, 直线CI交$\odot(ABC)$于N（异于C）。点K在直线NE上, $AI\perp IK$, P,B两点关于C对称。求证: B,I,K,P四点共圆。

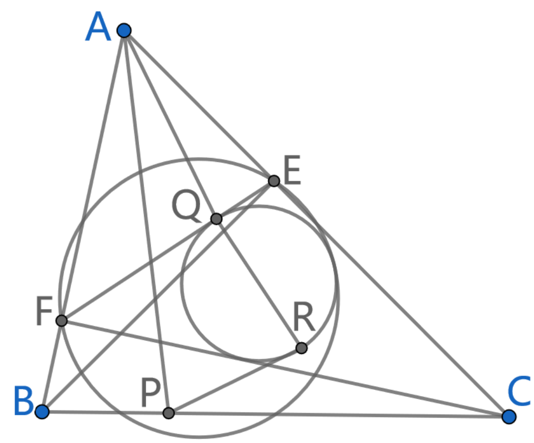
证. $\angle AIE=\pi-\angle AIB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，$\angle EIK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AIE=\dfrac{C}{2}$，$\angle KIC=\angle CIE-\angle EIK=\dfrac{B}{2}$，我们证明$d(B,NI)=d(K,NI)$ ①，即$a\sin\dfrac{C}{2}=IK\sin\dfrac{B}{2}$。 □

例 4.13. 点I是$\triangle ABC$的内心，一直线分别与直线AI,BI,CI交于P,Q,R。线段AP,BQ,CR的中垂线围成$\triangle XYZ$。求证：$\odot(ABC)$与$\odot(XYZ)$相切。

证. 设O为$\triangle ABC$的外心，AI,BI,CI分别交$\odot O$于D,E,F，则DE为CI的中垂线，$DE/\!/XY$。同理，$DF/\!/XZ$，$EF/\!/YZ$，所以$\triangle DEF$与$\triangle XYZ$位似。（1）若DX,EY,FZ交于一点S，不妨设P在Q,R之间，作$DU\perp XZ$于U，$DV\perp XY$于V，则$DU/\!/IB$，$DV/\!/IC$，$DU=\dfrac{IQ}{2}$，$DV=\dfrac{IR}{2}$，$\angle UDV=\angle BIC=\dfrac{\pi+A}{2}$，$D,U,X,V$四点共圆，$DX$为直径，$\triangle DUV\backsim\triangle IQR$，$UV=\dfrac{QR}{2}$，所以$DX=\dfrac{UV}{\sin\angle UDV}=\dfrac{QR}{2\cos\frac{A}{2}}$。同理，$EY=\dfrac{PR}{2\cos\frac{B}{2}}$，$FZ=\dfrac{PQ}{2\cos\frac{C}{2}}$。因为$QR=PR+PQ$，所以$DX\cos\dfrac{A}{2}=EY\cos\dfrac{B}{2}+FZ\cos\dfrac{C}{2}$ ①。设$XY=\lambda DE$，$\lambda\neq1$，则$SX=\lambda SD$，$DX=|\lambda-1|SD$，同理，$EY=|\lambda-1|SE$，$FZ=|\lambda-1|SF$，由①式，$SD\cos\dfrac{A}{2}=SE\cos\dfrac{B}{2}+SF\cos\dfrac{C}{2}$ ②。 □



例13



例14

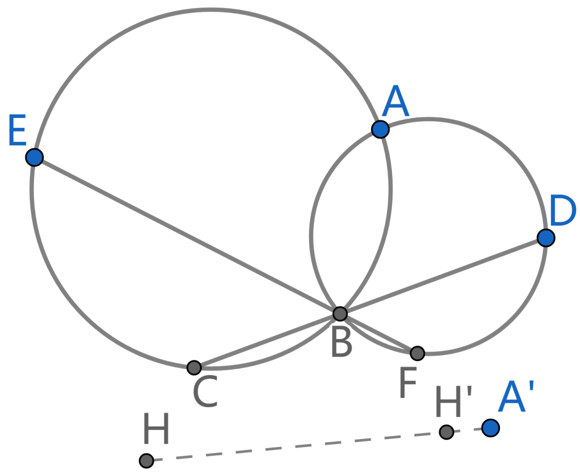
例 4.14. BE,CF是$\triangle ABC$的两条高，点P,Q分别在线段BC,EF上，$\angle BAP=\angle CAQ$。R是平面上一点，$PR\perp AQ$，$QR\perp EF$。求证：以QR为直径的圆与$\triangle ABC$的九点圆相切。

证. 设D为BC中点，BE交CF于H，K为AH中点，$\triangle ABC$的九点圆为ω，则DK为ω的直径且$DK\perp EF$，所以$DK/\!/QR$。 □

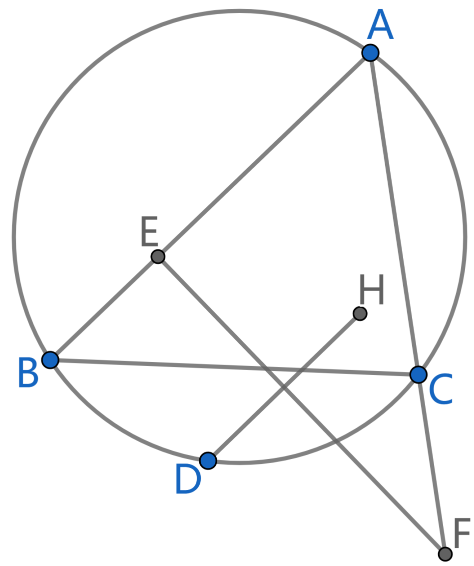
例 4.15. 两圆交于A,B两点，过B的两条直线分别与两圆交于点C,D和点E,F。$\triangle BCE$，$\triangle BDF$的垂心分别为H,H'。求证：A关于CD的对称点在直线HH'上。

证. □

例 4.16. 已知H为$\triangle ABC$的垂心，D在$\triangle ABC$的外接圆上，DH中垂线分别交AB,AC于点E,F。求证：A,E,D,F四点共圆。



例15



例16

证. □

5 计数原理与排列组合

1. 加法原理：完成一件事的方法可分成n个互不相交的类，在第一类到第n类分别有$m_1, m_2, ..., m_n$种方法，则完成这件事总共有$m_1 + m_2 + .. + m_n$种方法。应用加法原理的关键在于通过适当的分类，使得每一类都相对易于计数。

2. 乘法原理：完成一件事的方法有n个步骤，从第一步到第n步分别有$m_1, m_2, ..., m_n$种方法，则总共完成这件事有$m_1 m_2 ... m_n$种方法。应用乘法原理的关键在于通过适当地分步，使得每一步都相对易于计数。

3. 无重排列与组合：（1）无重排列：从n个不同元素中任取m个不同元素排成一列，不同的排列种数称为排列数，记为A_n^m或P_n^m。由乘法原理得到$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$。特别地，$A_n^n = n!$。（2）无重组合：从$n$个不同元素中任取$m$个元素并为一组，不同的组合种数称为组合数，记为$\dbinom{n}{m}$或$C_n^m$。它的公式为$\dbinom{n}{m} = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。它满足$\dbinom{n}{m} = \dbinom{n-1}{m} + \dbinom{n-1}{m-1}$, $0 \le m \le n-1$。

4. 可重排列与组合：（1）可重排列：从n个不同元素中可重复地任取m个元素排成一列，不同的排列种数有n^m种。（2）有限个重复元素的全排列：设n个元素由k个不同元素$a_1, a_2, ..., a_k$组成，分别有$n_1, n_2, ..., n_k$个（$n_1+n_2+...+n_k = n$），那么这n个元素的全排列数为$\dbinom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$。$k=2$时，我们有$\dbinom{n}{n_1, n_2} = \dbinom{n}{n_1} = \dbinom{n}{n_2}$。（3）可重组合：从$n$个不同元素中，任意可重复地选取$m$个元素，称为$n$个不同中取$m$个元素的可重组合，种数为$\dbinom{n+m-1}{m}$。（4）多元线性不定方程的正整数解个数：设$k, n$为正整数，则方程$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$的正整数解个数为$\dbinom{n-1}{k-1}$。

5. 圆排列：在n个不同元素中，每次取出m个元素排在一个圆环上，叫做一个圆排列（或环状排列）。圆排列有三个特点：（1）无头无尾；（2）按照同一方向旋转后仍是同一排列；（3）如果两个圆排列无论如何旋转都不相同，那么这两个圆排列才不相同。在n个元素中，每次取出m个不同的元素进行圆排列，种数

为$\frac{A_n^m}{m}=\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m}=\frac{n!}{m(n-m)!}$。

6. 容斥原理：设$A_1,A_2,...,A_n$为有限集合，用$|A_i|$表示集合A_i中的元素个数，那么$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-...+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|$。

7.（1）二项式定理：设n为非负整数，则$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$。

（2）多项式定理（multinomial theorem）：对任意正整数m和非负整数n，我们有

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_m=n\\ a_1,a_2,...,a_m\ge 0}}\binom{n}{a_1,a_2,...,a_m}x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_m^{a_m},$$

其中求和取遍所有满足$a_1+a_2+...+a_m=n$的非负整数$a_1,a_2,...,a_m$。多项式系数（multinomial coefficient）的定义在有限个重复元素的全排列中出现过：

$$\binom{n}{a_1,a_2,...,a_m}=\frac{n!}{a_1!a_2!...a_m!}=\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}...\binom{n-a_1-...-a_{m-1}}{a_m},$$

例 5.1 (第二类斯特林数)**.** 设$S(n,k)$为n元集分成k组的方法数，即将标有$1,2,...,n$的小球分为k组，不考虑不同组的次序的方法数。我们称它为第二类斯特林数。求证：（1）它满足下列递推式：$S(n+1,r)=S(n,r-1)+rS(n,r)$，$S(n,1)=S(n,n)=1$。（2）对任意正整数$n,k$，$k\le n$，我们有$k!S(n,k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$。

证.（1）

（2）由容斥原理，□

例 5.2 (第一类斯特林数)**.** 对$1,2,...,n$的每个排列σ，称$(i,\sigma(i),\sigma^2(i),...)$，$1\le i\le n$为$\sigma$中的一个圈，则$\sigma$能被划分称若干个互不相交的圈。设$F(n,r)$中是$1,2,...,n$的排列中恰有$r$个圈的排列的个数，称为第一类斯特林数。求证它满足递推式：$F(n+1,r)=F(n,r-1)+nF(n,r)$，$F(n,1)=(n-1)!$，$F(n,n)=1$。

证. □

例 5.3. 画出凸n边形的所有对角线，假设没有三条对角线经过同一点，求凸n边形被分成多少块？这些对角线能围成多少个不同的三角形？

证. □

例 5.4. 设n是非负整数，求证：$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}=2^n\quad$①。

证. 法一：在平面格点上从$(0,0)$走到直线$x=n+1$或$y=n+1$，每步都以$\frac{1}{2}$的概率向右或向上。我们有$1=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k}}$，①式成立。

法二：设$a_n=$①式左边，则

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}[\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-1}{k}]\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^k}$$

$$+\binom{2n-1}{n}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}+a_{n-1}=\frac{a_n}{2}+a_{n-1},$$

这里用到$\binom{2n-1}{n}=\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$。所以$a_n=2a_{n-1}=...=2^na_0=2^n$。 □

例 5.5. 设$\varphi(n)$为$1,2,...,n$中与n互素的正整数的个数，试用容斥原理证明$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{p_i})$，其中$p_1,p_2,...,p_m$是$n$的所有不同的质因子。

证. □

例 5.6. 设n是非负整数，试求出$F=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}$的值。

解. 设$\omega=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$为三次单位根。则$3\mid j$时，$1+\omega^j+\omega^{2j}=3$；$3\nmid j$时，$1+\omega^j+\omega^{2j}=0$。

$$(1+1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j},\qquad (1+\omega)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^j,\qquad (1+\omega^2)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{2j},$$

$$2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+\omega^j+\omega^{2j})=3\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k},$$

另一边，$1+\omega=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$，$1+\omega^2=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}$，所以$n\equiv 0\pmod 6$时，$F=\frac{2^n+2}{3}$；$n\equiv 1,5\pmod 6$时，$F=\frac{2^n+1}{3}$；$n\equiv 2,4\pmod 6$时，$F=\frac{2^n-1}{3}$；$n\equiv 3\pmod 6$时，$F=\frac{2^n-2}{3}$。 □

例 5.7. 假设有一只蚂蚁要从$(0,0)$走到(n,n)，它每一步只能从一个格点走到右边或上边相邻的格点。已知它的路线从不走到直线$y=x$上方，求合法道路的条数。

解. 设$m,n\geq 0$，则在格点平面上从$(0,0)$走到(m,n)，每步只能走到右边或上边相邻格点的路径数为$\binom{m+n}{n}$。这些路径和$m+n$步中选n步向上走的方法一一对应。

考虑从$(0,0)$走到(n,n)，走到直线$y=x$上方的路线一定要走到$y=x+1$上。 □

例 5.8. （1）在圆周上有$2n$个点，有多少种方法把一对点连接成弦后得到n条互不相交的弦？ （2）把凸n边形剖分成三角形有多少种方法？

证. □

例 5.9 (错排问题)**.** 考虑$1,2,...,n$的所有$n!$个排列，假设σ是其中一个排列，如果$\sigma(i)=i$，$1\leq i\leq n$就称i为σ的不动点。设p_n是没有不动点的排列的个数，试求p_n的表达式。

证. □

例 5.10. 长为n的字符串中的每个字符均为$0,1,2$，问有多少个这样的字符串，使得任意相邻的两数只差至多为1？

证. □

例 5.11. 在一个圆周上取n个点并作所有连接这n个点中任意两点的弦。假设没有三条弦交于一点，求圆盘被这些弦划分成多少块。

证. □

例 5.12. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足对任意正整数n，都有$\sum\limits_{d|n} a_d = 2^n$。求证：$n|a_n$。

证. □

例 5.13. $\{1,2,...,n\}$有多少个子集中没有两个相邻的数?

证. □

6 概率与期望-1

1.（1）样本点：一次试验（例如掷骰子），可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件。

（2）样本空间：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体。

（3）随机事件：样本空间的子集称为随机事件，简称事件。

2.（1）必然事件：在试验中必然发生的事件，即样本空间I自身，它的概率为1，即$P(I)=1$。

（2）不可能事件：不可能发生的事件，即空集$\emptyset$。它发生的概率为0，即$P(\emptyset)=0$。

（3）互斥事件：事件A,B不能同时发生，即$A\cap B=\emptyset$，则称A,B为互斥事件，也称为互不相容的事件。

（4）对立事件：如果事件A,B满足$A\cap B=\emptyset$，$A\cup B=I$，那么A,B称为对立事件，并将B记为$\overline{A}$。我们有一个常用公式$P(\overline{A})=1-P(A)$。

（5）和事件：$A\cup B$称为事件A与B的和事件。

（6）积事件：$A\cap B$称为事件A与B的积事件，也简记为AB。

3. 概率：概率是样本空间I中的一种测度，即对每一个事件A，有一个实数与它对应，记为$P(A)$，它满足以下三条性质：（1）（非负性）$P(A)\geq 0$；（2）$P(I)=1$，$P(\emptyset)=0$；（3）（可加性）在A,B为互斥事件时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。以上三条性质是概率的定义，除此之外，概率还满足如下性质：（4）如果$A\subset B$，那么$P(A)\leq P(B)$；（5）设A,B是一次随机试验中的两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

4.（1）古典概型：如果试验有n种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于$\frac{1}{n}$。

（2）频率：在同样的条件下进行n次试验，如果事件A发生m次，那么就说A发生的频率为$\frac{m}{n}$。

5.（1）条件概率：在事件A已经发生的条件下，事件B发生的概率称为条件概率，记为$P(B|A)$。我们有$P(AB)=P(A)P(B|A)$，即$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

（2）独立事件：如果事件A是否发生，对于事件B的发生没有影响，即$P(B|A)=P(B)$，那么称A,B为独立事件。这时$P(AB)=P(A)P(B)$，且$P(A|B)=P(A)$。

6.（1）全概率公式：如果样本空间I可以分拆为$B_1,B_2,...,B_n$，即$B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=I$，且$B_i\cap B_j=\emptyset\ (1\leq i<j\leq n)$，那么事件$A$发生的概率为$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$。

（2）贝叶斯公式：设$B_1,B_2,...,B_n$是I的分拆，在已知所有的$P(B_i)$与$P(A|B_i)\ (1\leq i\leq n)$时，可用公式$P(B_j|A)=\dfrac{P(AB_j)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$求出$P(B_j|A)$。它的简单形式为$P(B|A)=\dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$，其中$P(A)\neq 0$。

7.（1）随机变量：随机变量X是样本空间I上的函数，即对样本空间I中的每一个样本点e，都有一个确定的实数$X(e)$与e对应。$X=X(e)$称为随机变量。

（2）数学期望：设X是随机变量，则称$E(X)=\sum_{e\in I}X(e)P(e)$为$X$的数学期望，其中$e$跑遍样本空间$I$中的所有样本点，$P(e)$是$e$的概率。它满足如下性质：（i）若$a$是常数，则$E(aX)=aE(X)$；（ii）如果$X,Y$是两个随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。上述两个性质称为期望的线性性质。

8.（1）称可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量为离散型随机变量。

（2）设离散型随机变量X的所有可能取值为x_i，$1\le i\le n$，则将$P(X=x_i)=p_i$，$1\le i\le n$称为X的分布列。它也可以用表格表示。

（3）离散型随机变量X的数学期望（或均值）定义为$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，其中$X$的分布列由（2）给出。若$X,Y$是独立的离散型随机变量，则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

（4）离散型随机变量X的方差定义为$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$，它满足$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$。$X$的标准差定义为$\sqrt{D(X)}$。

证.（3）设X的所有可能取值为$\{x_i\}_{1\le i\le n}$，$P(X=x_i)=p_i$，Y的所有可能取值为$\{y_j\}_{1\le j\le m}$，$P(Y=y_j)=q_j$。则

$$\begin{aligned}E(XY)&=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_iy_jP(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)\\&=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}x_ip_iy_jq_j=(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i)(\sum_{j=1}^{m}y_jq_j)=E(X)E(Y),\end{aligned}$$

（4）我们有$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2E(X)x_i+E(X)^2)p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n}p_i=E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$。 □

9.（1）伯努利分布：又称两点分布或$0-1$分布，它的分布列为$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p,\ 0\le p\le 1$。此时$X$的均值和方差分别为$E(X)=p,\ D(X)=p(1-p)$。

（2）二项分布$B(n,p)$：它的分布列为$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ 0\le k\le n$。此时$X$的均值和方差分别为$E(X)=np,\ D(X)=np(1-p)$。伯努利分布是二项分布中$n=1$的特殊情况。

（3）若$X_1,X_2,...,X_n$是独立同分布的随机变量，都服从伯努利分布$B(1,p)$，那么它们的和服从二项分布$B(n,p)$，即$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim B(n,p)$。

证.（1）$E(X)=1\cdot P(X=1)+0\cdot P(X=0)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$。因为$X$的取值只能为$\{0,1\}$，所以$X^2=X$，$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X)-p^2=p(1-p)$。

（2）法一：设$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\{X_i\}_{1\le i\le n}$是独立同分布的随机变量，都服从伯努利分布$B(1,p)$。则对任意$1\le i<j\le n$，有$E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)=p^2$。于是$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np,\ D(X)=E(X^2)-E(X)^2=E[(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2]-(np)^2=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)-n^2p^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2=np(1-p)$。

法二：我们直接从X的分布列计算它的期望和方差。

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(X_k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np(p+1-p)^{n-1}=np,$$
$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot P(X_k)=\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)+k]\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}[n(n-1)\binom{n-2}{k-2}+n\binom{n-1}{k-1}]$$
$$\cdot p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$
$$=n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}+np(p+1-p)^{n-1}=n(n-1)p^2+np,$$

所以$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$。

（3）设$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则对任意$0\leq k\leq n$，$\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$中选中某k个为1，另外$n-k$个为0有$\binom{n}{k}$种选法，每种选法出现的概率为$p^k(1-p)^{n-k}$。于是$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$。 □

例 6.1.

证. □

引理 6.1 (伯努利不等式的一个推广)**.** 设实数$x_i\geq -1$，$1\leq i\leq n$，且所有x_i同号。我们有$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq 1+x_1+x_2+...+x_n$ ①。

证. $n=1$时命题是平凡的。$n\geq 2$时，假设命题对$n-1$成立，则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq(1+x_1+...+x_{n-1})(1+x_n)=1+x_1+...+x_n+x_n(x_1+...+x_{n-1})\geq 1+x_1+...+x_n,$$

于是命题对n成立。由数学归纳法知命题①成立。 □

例 6.2. 假设每个人的生日均匀且独立地分布在平年的365天，问至少要有几个人，才能使得存在两个人同月同日出生的概率大于$\frac{1}{2}$？试用斯特林近似公式估计365个人生日两两不同的概率。

证. 作为练习，我们来估计$n=365$，$r=23$时的$P=\prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{i}{n})$，它的精确值为0.4927027657。由上述引理，

$$P^2=\prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{i}{n})(1-\frac{r-i}{n})=\prod_{i=1}^{r-1}(1-\frac{r}{n}+\frac{i(r-i)}{n^2})=(1-\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i(r-i)}{n(n-r)})$$
$$\geq(1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n-r)}]=(1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r-1)(r+1)}{6n(n-r)}],\qquad P\geq 0.4926724250,$$

这里用到$\sum_{i=1}^{r-1}i(r-i)=r\cdot\frac{r(r-1)}{2}-\frac{r(r-1)(2r-1)}{6}=\frac{r(r-1)(r+1)}{6}$。另一边，因为$\frac{n-i}{n}\leq\frac{n}{n+i}$，所

以$P \le \prod_{i=1}^{r-1} \frac{n}{n+i}$，$P^{-1} \ge \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i}{n})$。由引理，

$$P^{-2} \ge \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i}{n})(1+\frac{r-i}{n}) \ge \prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{r}{n}+\frac{i(r-i)}{n^2}) = (1+\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1+\frac{i(r-i)}{n(n+r)})$$
$$\ge (1+\frac{r}{n})^{r-1}[1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n+r)}] = (1+\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r-1)(r+1)}{6n(n+r)}], P \le 0.506980,$$

这个估计有点放过了。我们再给一个估计：由均值不等式，$(1-\frac{i}{n})\cdot(1-\frac{r-i}{n}) \le (1-\frac{r}{2n})^2$，所以$P \le (1-\frac{r}{2n})^{r-1} = 0.4944520489$。这个估计精确到了千分位。再给一个更精确的上界：

$$P^2 = (1-\frac{r}{n})^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}[1+\frac{i(r-i)}{n(n-r)}] \le (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{i(r-i)}{n(n-r)}]^{r-1}$$
$$= (1-\frac{r}{n})^{r-1}[1+\frac{r(r+1)}{6n(n-r)}]^{r-1}, \qquad P \le 0.4927029894,$$

这个估计精确到了千万分位。 □

例 6.3.

证. □

例 6.4.

证. □

定理 6.1 (斯特林近似公式)**.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n} = 1$，也可以写为$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$，$n \to \infty$。

证. $n \ge 1$时，设$a_n = \sum_{k=1}^{n}\ln k - \frac{1}{2}\ln n - n(\ln n - 1)$，先证明$\{a_n\}$单调减且有下界：$n \ge 2$时，因为$\int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x = [x(\ln x-1)]_{n-1}^{n} = n(\ln n-1)-(n-1)(\ln(n-1)-1)$，且$\ln x$上凸，所以$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n) - \int_{n-1}^{n}\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(\ln(n-1)+\ln n-\ln x-\ln(2n-1-x))\mathrm{d}x < 0$，$\{a_n\}$单调减。因为$n-1 \le x \le n$时，$\frac{1}{2}(\ln x+\ln(n-1-x)) < \ln(n-\frac{1}{2})$，所以$a_n - a_{n-1} > \frac{1}{2}(\ln(n-1)+\ln n) - \ln(n-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}[\ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n-1}{2n}] > -\frac{1}{2}[\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}] = -\frac{1}{4n(n-1)}$，$a_n > a_1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4k(k-1)} = 1-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n}) > \frac{3}{4}$，$\{a_n\}$有下界。由单调有界原理，$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，设$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n} = A$，下面证明$A = \sqrt{2\pi}$。由正弦函数的无穷乘积公式，$\sin x = x\prod_{n\ge1}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$，令$x = \frac{\pi}{2}$，我们有

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\ge1}(1-\frac{1}{4n^2}) = \prod_{n\ge1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{(2n)!!^4}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}n!^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{A\sqrt{2n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}\cdot A\sqrt{2n+1}(\frac{2n+1}{\mathrm{e}})^{2n+1}}{2^{4n}[A\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n]^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4A^{-2}\sqrt{1+\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{2n})}^{2n+1}\mathrm{e}^{-1} = 4A^{-2},$$

因为$A > 0$，所以$A = \sqrt{2\pi}$。 □

7 局部不等式

习题 7.1 (加权的均值不等式)**.** 设n为正整数，对于$1 \le i \le n$，有$w_i > 0$，$x_i > 0$，且$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。则我们有

$$w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n \ge x_1^{w_1}x_2^{w_2}...x_n^{w_n}, \qquad ①$$

证. 设$M = x_1^{w_1}x_2^{w_2}...x_n^{w_n}$，$y_i = \ln(\frac{x_i}{M})$，则$\sum_{i=1}^{n} w_iy_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(\ln x_i - \ln M) = (\sum_{i=1}^{n} w_i \ln x_i) - \ln M = 0$。因为$\frac{x_i}{M} = \mathrm{e}^{y_i} \ge 1 + y_i$，所以$\sum_{i=1}^{n} w_i\frac{x_i}{M} \ge \sum_{i=1}^{n} w_i(1+y_i) = 1$，$\sum_{i=1}^{n} w_ix_i \ge M$，①式成立。 □

习题 7.2. 设$A, B, C \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$A + B + C = \pi$，求证：$\sin A + \sin B + \sin C \ge 2 \quad ①$。

证. 我们证明$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$时，$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x \quad ②$。设$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$，则$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$，它关于$x$严格单调减。因为$f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$，$f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$，所以存在唯一的$x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$，使得$f'(x_0) = 0$。事实上，$x_0 = \arccos\frac{2}{\pi}$。所以$x \in (0, x_0)$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调增，$f(x) > f(0) = 0$；$x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$时，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调减，$f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$。所以②式成立，①式左边$\ge \frac{2}{\pi}(A + B + C) = 2$，①式成立。 □

例 7.1. 设$a, b, c \in \mathbb{R}_+$且$a^2 + b^2 + c^2 = 3$。求证：$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \ge 1$。

分析：容易观察到$a = b = c = 1$时等号成立。我们使用待定系数法，假设$f(a) = \frac{1}{a^3+2} \ge Aa^2 + B$，因为$a = 1$时上式取等，所以$A + B = \frac{1}{3}$，$A = \frac{\partial f}{\partial a^2}|_{a=1} = -\frac{1}{6}$。

证. 法一：设$f(x) = \frac{1}{x^3+2}$，则$f'(x) = \frac{-3x^2}{x^3+2}$，$f'(1) = -\frac{1}{3}$，$\frac{\partial f}{\partial x^2}|_{x=1} = f'(1) \cdot \frac{\partial x}{\partial x^2}|_{x=1} = -\frac{1}{6}$。我们证明$x \ge 0$时，$f(x) \ge -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} \quad ①$，即$6 \ge (3 - x^2)(x^3 + 2)$，上式左边$-$右边 $= x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x-1)^2(x+2) \ge 0$，所以①式成立。$f(a) + f(b) + f(c) \ge -\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2} = 1$。

法二： □

例 7.2. 设$a, b, c \ge 0$且$a + b + c = 4$，求

$$S = \frac{1}{a^2-6a+16} + \frac{1}{b^2-6b+16} + \frac{1}{c^2-6c+16} \text{ 的最大值。}$$

分析：先猜何时S取最大值。$a = b = c = \frac{4}{3}$时，$S = \frac{3}{\frac{16}{9} - 8 + 16} = \frac{27}{88}$；$a = b = 2$，$c = 0$时，$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$；$a = 4$，$b = c = 0$时，$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$。因为$\frac{27}{88} < \frac{5}{16}$，我们猜测$S$的最大值为$\frac{5}{16}$。

解. 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+16}$，则$f'(x)=\dfrac{-2x+6}{(x^2-6x+16)^2}$，$f'(2)=\dfrac{1}{32}$，$f(2)=\dfrac{1}{8}$，$f(0)=\dfrac{1}{16}$。我们证明$x\geq 0$时，$f(x)\leq\dfrac{1}{32}x+\dfrac{1}{16}$ ①，①式右边即$f(x)$在$x=2$处的切线，它也是$f(x)$过$(0,f(0))$和$(2,f(2))$两点的割线。①式 $\iff (x+2)(x^2-6x+16)\geq 32$，上式左边−右边$=x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2\geq 0$，所以①式成立，$S=f(a)+f(b)+f(c)\leq\dfrac{1}{32}(a+b+c)+\dfrac{3}{16}=\dfrac{5}{16}$，$a=0,b=c=2$时等号成立。所以$S$的最大值为$\dfrac{5}{16}$。 □

例 7.3. 求最大的常数k，使得对任意正实数x,y,z，都有

$$\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\geq\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

分析：$x=y=z=1$时，我们有$k\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$；$x=y=1$，$z=0$时，有$k\leq 2\sqrt{2}$；$x=1$，$y=z=0$时，有$k\leq+\infty$。因为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<2\sqrt{2}$，所以我们猜测$k$的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

解. 设$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sum\dfrac{x}{y^2+z^2}$，我们证明$S$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。因为将$(x,y,z)$同乘以任一正实数后$S$不变，所以可不妨设$x^2+y^2+z^2=3$，设$f(x)=\dfrac{x}{3-x^2}$，$f'(x)=\dfrac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$，$f'(1)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial x^2}|_{x=1}=f'(1)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x^2}|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$。我们证明$x\geq 0$时，$f(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$ ①，即$x-\dfrac{x^2}{2}(3-x^2)=\dfrac{x}{2}(x^3-3x+2)=\dfrac{x}{2}(x-1)^2(x+2)\geq 0$。于是①式成立，$S=\sqrt{3}(f(x)+f(y)+f(z))\geq\sqrt{3}\cdot\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=y=z=1$时上式等号成立。所以$S$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，最大的$k$为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

例 7.4 (2007，西部数学奥林匹克)**.** 设实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leq\frac{1}{4},$$

证. 设$f(x)=\dfrac{1}{5x^2-4x+11}$，$f'(x)=\dfrac{4-10x}{(5x^2-4x+11)^2}$，$f'(1)=-\dfrac{1}{24}$。我们证明$x\leq\dfrac{9}{5}$时，$f(x)\leq-\dfrac{1}{24}x+\dfrac{1}{8}$ ①，即$24\leq(5x^2-4x+11)(3-x)$。上式左边−右边$=5x^3-19x^2+23x-9=(x-1)^2(5x-9)\leq 0$，所以①式成立。不妨设$a\leq b\leq c$，（1）若$c\leq\dfrac{9}{5}$，则$f(a)+f(b)+f(c)\leq-\dfrac{1}{24}(a+b+c)+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{4}$；（2）若$c>\dfrac{9}{5}$，则$5c^2-4c+11>5\cdot(\dfrac{9}{5})^2-4\cdot\dfrac{9}{5}+11=20$，$5a^2-4a+11\geq 5\cdot(\dfrac{2}{5})^2-4\cdot\dfrac{2}{5}+11=\dfrac{51}{5}$，同理$5b^2-4b+11\geq\dfrac{51}{5}$，于是$f(a)+f(b)+f(c)\leq\dfrac{5}{51}\cdot 2+\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{4}$。综上所述，原不等式得证。 □

例 7.5. 设$x,y,z\geq 0$，且$x^2+y^2+z^2=1$。求证：$\dfrac{x}{1+yz}+\dfrac{y}{1+zx}+\dfrac{z}{1+xy}\geq 1$。

证. 观察到$x=1,y=z=0$时等号成立，以及

$$\frac{x}{1+yz}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2+yz}\geq\frac{x}{x^2+\frac{3}{2}(y^2+z^2)}=\frac{2x}{3-x^2},$$

我们证明$\dfrac{2x}{3-x^2}\geq x^2$ ①。①式$\iff 2\geq x(3-x^2)$，上式左边−右边$=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\geq 0$，①成立。所以$\dfrac{x}{1+yz}\geq\dfrac{2x}{3-x^2}\geq x^2$，同理，$\dfrac{y}{1+zx}\geq y^2$，$\dfrac{z}{1+xy}\geq z^2$，所以原式左边$\geq x^2+y^2+z^2=1$。 □

例 7.6. 设$x,y,z\ge 0$，求证：$\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}\ge 2$。

证. x,y,z同时乘一个相同的正数不改变原式左右两边，所以可不妨设$x+y+z=2$。观察到$x=y=1,z=0$时等号成立。设$f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$，则$f(0)=0,f(1)=1$，$f'(x)=f(x)(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(2-x)})$，$f'(1)=1$。我们证明$f(x)\ge x$　①，上式右边即为$f(x)$在$x=1$处的切线或过$(0,f(0)),(1,f(1))$两点的割线。

$$①式\iff 1\ge\sqrt{x(2-x)}\iff 1-x(2-x)=(x-1)^2\ge 0,$$

①式得证，原式左边$=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}+\sqrt{\dfrac{y}{2-y}}+\sqrt{\dfrac{z}{2-z}}\ge x+y+z=2$。 □

引理 7.1. 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是区间$[a,b]$上的下凸函数，则$\max\limits_{a\le x\le b}f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$。

证. 设$x\in[a,b]$，则存在$\lambda,\mu\ge 0,\lambda+\mu=1$使得$x=\lambda a+\mu b$。设$M=\max\{f(a),f(b)\}$，于是$f(x)=f(\lambda a+\mu b)\le\lambda f(a)+\mu f(b)\le\lambda M+\mu M=M$。 □

例 7.7. 设$0\le a,b,c\le 1$，求证：$\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le 2$。

证. 法一：设$F(a,b,c)=\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}$，则$b,c$固定时，$\dfrac{\partial^2F}{\partial a^2}=\dfrac{2bc^2}{(ca+1)^3}+\dfrac{2b^2c}{(ab+1)^3}\ge 0$，$F$是$a$的下凸函数。所以$F(a,b,c)\le\max\{F(0,b,c),F(1,b,c)\}$，同理，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,0,c),F(a,1,c)\}$，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,b,0),F(a,b,1)\}$。所以

$$F(a,b,c)\le\max\{F(0,0,0),F(1,0,0),F(1,1,0),F(1,1,1)\}=\max\{0,1,2,\frac{3}{2}\}=2,$$

注：也可以由$F'(a)=\dfrac{1}{bc+1}-\dfrac{bc}{(ca+1)^2}-\dfrac{bc}{(ab+1)^2}$关于$a$单调增推出$F$是$a$的下凸函数。

法二：我们证明$\dfrac{a}{bc+1}\le\dfrac{2a}{a+b+c}$　①，即$2bc+2\ge a+b+c$。上式左边$-$右边$=bc+1-a+(1-b)(1-c)\ge 0$，所以①式成立。同理，$\dfrac{b}{ca+1}\le\dfrac{2b}{a+b+c}$，$\dfrac{c}{ab+1}\le\dfrac{2c}{a+b+c}$，三式相加即有$F(a,b,c)\le\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$。 □

例 7.8. 非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，求证：$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ac$　①。

分析：我们先对右边做恒等变形，对a,b,c分离变量，然后考察一元函数$\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2}{2}$和它在$x=1$处的切线。

证. ①式$\iff\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$　②。我们证明$t\ge\dfrac{1}{4}$时，$\dfrac{1}{2}t^6+t\ge\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{1}{6}$　③。因为$6\cdot$(③式左边$-$右边)$=3t^6-8t^3+6t-1=(t-1)^2(3t^4+6t^3+9t^2+4t-1)\ge 0$，所以③式成立。于是$x\ge\dfrac{1}{64}$时，$\sqrt[3]{x}\ge\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}x^2$　④。不妨设$a\ge b\ge c$，（1）若$a,b,c\ge\dfrac{1}{64}$都成立，则由④式，②式左边$\ge\dfrac{4}{3}(a+b+c)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=$②式右边，②, ①式成立。（2）若$c\le\dfrac{1}{64}$，此时$\sqrt[3]{c}\ge 3c$，①式左边$\ge\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+3c=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+c^2+bc+ac$，只需证明$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\ge ab$　⑤。设$u=\sqrt[6]{ab}$，则$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-ab\ge 2u-u^6=u(2-u^5)$　⑥，由均值不等式：$u^5\le(\dfrac{a+b}{2})^{\frac{5}{3}}\le(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}$，因为$8-(\dfrac{3}{2})^5=\dfrac{13}{32}>0$，所以$2-u^5\ge 2-(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}\ge 0$，⑥式右边$\ge 0$，于是⑤, ①式成立。 □

习题 7.3 (向天行)**.** 在与上一题同样的条件下，我们曾经证明过$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ac$。那道题同样能用切线法解决。这引发了一个问题：设非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，是否总有$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ①?

答案是否定的。取$a=b=\dfrac{2}{3}$，$c=\dfrac{5}{3}$，我们有①式左边$=2.9328$，①式右边$=2.9240$。又或者$a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=2$时，①式左边$=2.8473$，①式右边$=2.8284$。进一步我们可以问，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}$的最小值是多少?

例 7.9 (2001，IMO)**.** 已知正实数a,b,c，求证：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$ ①。

证. 法一：由赫尔德不等式，$(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}})^2[\sum a(a^2+8bc)]\ge(a+b+c)^3$。另一边，由均值不等式，$(a+b+c)^3-\sum a(a^2+8bc)=3\sum(a^2b+bc^2)-18abc\ge 0$。所以①式左边$\ge 1$。

法二：我们证明$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ ②。这等价于$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\ge a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$，

$$\text{上式左边}-\text{右边}=2a^{\frac{4}{3}}(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})+(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-8a^{\frac{2}{3}}bc\ge 4a^{\frac{4}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}+4(bc)^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{2}{3}}bc\ge 0,$$

所以②式成立。①式左边$\ge\sum\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1$。 □

例 7.10. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$ ①。

证. 不妨设$a+b+c=3$，我们证明$\dfrac{(a+3)^2}{3a^2-6a+9}\le\dfrac{4}{3}a+\dfrac{4}{3}$，这等价于 $4a^3-5a^2-2a+3=(a-1)^2(4a+3)\ge 0$。于是①式左边$\le\dfrac{4}{3}(a+b+c)+4=8$。 □

例 7.11 (2009，塞尔维亚)**.** 设x,y,z为正实数，且$x+y+z=xy+yz+zx$。求证：$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\le 1$ ①，并确定等号成立的条件。

证. 设$\sum x=\sum xy=s$，则$s=\sum xy\le\dfrac{1}{3}(\sum x)^2=\dfrac{s^2}{3}$，$s\ge 3$。由柯西不等式，

$$\frac{1}{x^2+y+1}\le\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{y^2+z+1}\le\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{z^2+x+1}\le\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2},$$

所以①式左边$\le\dfrac{3+\sum x+\sum x^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{3+\sum xy+\sum x^2}{\sum x^2+2\sum xy}\le 1$。 □

例 7.12. 已知非负实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=1$，求证：$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\ge 2$ ①。

证. 由柯西不等式，$\sqrt{(1-xy)(1-xz)}=\sqrt{[(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)+\frac{z^2}{4}][(x-\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}(y^2+z^2)+\frac{y^2}{4}]}\ge(x-\dfrac{y}{2})(x-\dfrac{z}{2})+\dfrac{3}{4}(y^2+z^2)+\dfrac{yz}{4}=x^2+\dfrac{3}{4}(y^2+z^2)-\dfrac{xy+xz-yz}{2}$。对上式求和，得①式左边$\ge\sum[x^2+\dfrac{3}{4}(y^2+z^2)-\dfrac{xy+xz-yz}{2}]=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\sum xy\ge 2$。 □

例 7.13. 设实数$a_1,a_2,...,a_n\in(-1,1]$，约定$a_{n+1}=a_1$。求证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$。

证. □

例 7.14. 实数x,y,z满足$x+y+z=1$，设$F=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$。求证：（1）若 $x,y,z\le\frac{4}{3}$，则$F\le\frac{27}{10}$；（2）若$x,y,z\ge 0$，则$F\ge\frac{5}{2}$。

证. □

例 7.15. 设n为正整数，对任意实数$a_i,b_i\in[1,2]$ $(1\le i\le n)$，若$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$。何时等号成立?

证. 对任意$1\le i\le n$，我们有$\frac{b_i}{2}\le a_i\le 2b_i$，所以

$$0\ge(a_i-\frac{b_i}{2})(a_i-2b_i)=a_i^2+b_i^2-\frac{5}{2}a_ib_i\quad ①,\qquad a_ib_i\ge\frac{2}{5}(a_i^2+b_i^2),$$

①式乘以$\frac{a_i}{b_i}$，得$0\ge\frac{a_i^3}{b_i}+a_ib_i-\frac{5}{2}a_i^2\ge\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}(a_i^2+b_i^2)-\frac{5}{2}a_i^2$。上式对$1\le i\le n$求和，得$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)=\frac{17}{10}a_i^2$。$n$为偶数，$\{a_i\}_{1\le i\le n}$中有$\frac{n}{2}$个为1，另$\frac{n}{2}$个为2，$b_i=3-a_i$，$1\le i\le n$时等号成立。 □

例 7.16. 设n为正整数，实数$\{x_i\}_{1\le i\le n}$满足$|x_i|\le 2$，$1\le i\le n$，且$\sum_{i=1}^{n}x_i^3=0$。求证：$\sum_{i=1}^{n}x_i\le\frac{2}{3}n$。

证. □

例 7.17. 有n个互异的实数$x_1,x_2,...,x_n$满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$。求证：存在互不相同的 $a,b,c,d\in\{x_1,x_2,...x_n\}$，使得$a+b+c+nabc\ge\sum_{i=1}^{n}x_i^3\ge a+b+d+nabd$。

证. 不妨设$x_1<x_2<...<x_n$，取$a=x_1,b=x_n,c=x_2,d=x_{n-1}$，我们有

$$(x_i-a)(x_i-b)(x_i-c)=x_i^3-(a+b+c)x_i^2+(ab+bc+ca)x_i-abc\le 0,$$

所以$(x_i-a)(x_i-b)(x_i-d)=x_i^3-(a+b+d)x_i^2+(ab+bd+da)x_i-abd\ge 0$。 □

8 圆锥曲线的更多性质

9 调整法-1

10 几何选讲-4

例 10.1 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF\parallel BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。

证. 法一：设BP交AC于U，DQ交AC于V，

$$AU = AP\cdot\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle AUP} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle DAF} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle DAF} = AB\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{AD}{AC}, \qquad ①$$

$$\text{同理，} AV = AD\cdot\frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle BAE} = AD\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{AB}{AC} = ①\text{式右边},$$

所以U,V重合，$UP\cdot UB = UA^2 = UD\cdot UQ$，$B,P,Q,D$四点共圆。

法二：设$A=\angle BAC=\angle DAC$，由正弦定理，$AP = AB\cdot\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle APB} = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin A}$。所以$AP\cdot AF = AB\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin A}\cdot AF = \frac{AB\cdot d(F,AC)}{\sin A}$，同理，$AQ\cdot AE = \frac{AD\cdot d(E,AC)}{\sin A}$。设$BD$交$AC$于点$J$，因为$EF/\!/BD$，所以

$$\frac{AP\cdot AF}{AQ\cdot AE} = \frac{AB}{AD}\cdot\frac{d(F,AC)}{d(E,AC)} = \frac{BJ}{JD}\cdot\frac{d(D,AC)}{d(B,AC)} = 1,$$

于是P,Q,E,F四点共圆。$\angle QPB+\angle QDB = \angle QPA+\angle BPA+\angle QDA+\angle BDA = \angle FEA+A+\angle CAE+\angle BDA = \pi$，所以$B,P,Q,D$四点共圆。 □