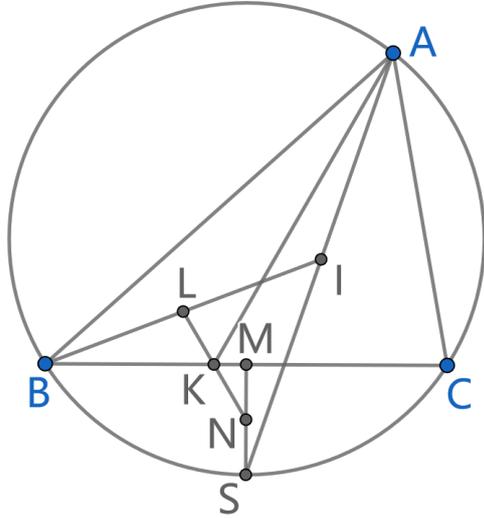


三角形的五心-2

三角形的五心-2

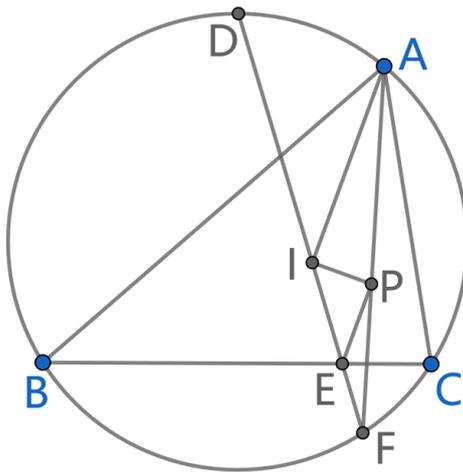
例 1. 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, S 是 $\odot(ABC)$ 的弧 BC 的中点. 点 L, M, N 分别是线段

BI, BC, MS 的中点, LN 与 BC 相交于 K . 求证: $\angle AKL = \angle BKL$.



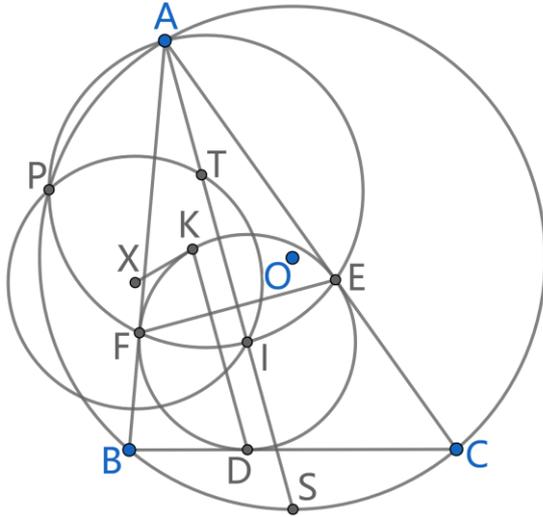
例 2. $\triangle ABC$ 内接于圆 ω , 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 点 D 是 ω 上的弧 BAC 的中点, 延长

DI 分别交 BC 和 ω 于 E, F . 点 P 在 AF 上, $EP \parallel AI$. 求证: $PI \perp AI$.

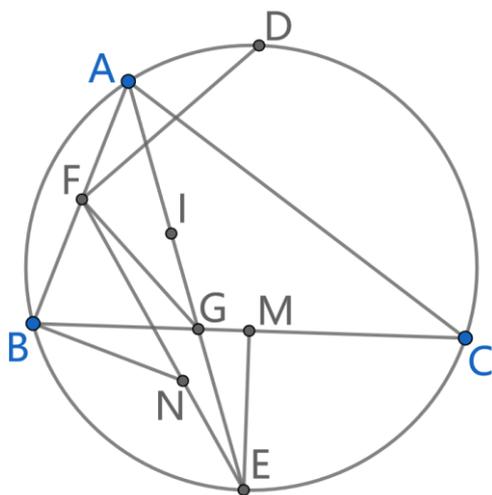


三角形的五心-2

例 3. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 分别切 BC, CA, AB 于点 D, E, F 。点 K 在 $\odot I$ 上, $DK \perp EF$ 。延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 于 S , 点 T 是 S 关于 I 的对称点。过 A, E, F 三点作圆交 $\odot O$ 于 $P (P \neq A)$ 。过 I, P, T 三点作圆 ω , 点 X 是 ω 的圆心且 $X \neq K$ 。求证: XK 与 $\odot I$ 相切。

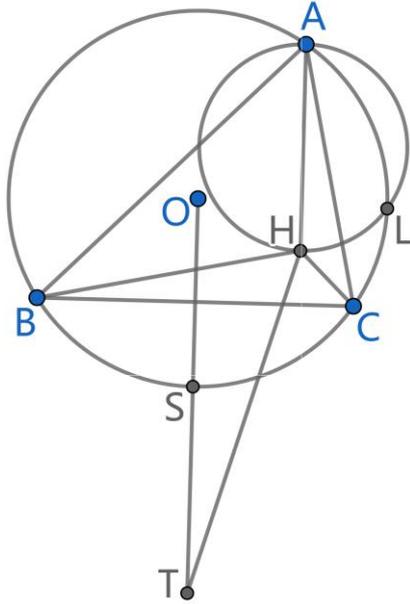


例 4. (2018, 高联 A 卷) $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $AB < AC$, M 是 BC 的中点。 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆上弧 BAC 和弧 BC 的中点。 F 是 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB 的切点。 AE, BC 相交于 G , 点 N 在 EF 上, $BN \perp AB$ 。求证: 若 $BN = EM$, 则 $DF \perp FG$ 。

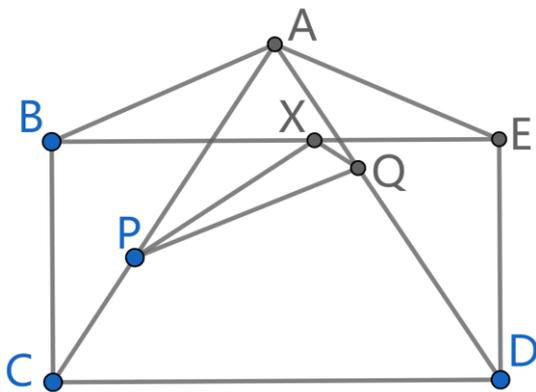


三角形的五心-2

例 5. H 是非等腰锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 以 AH 为直径的圆与 $\odot O$ 相交于 A, L 。点 S 是弧 BC 的中点, $\angle BHC$ 的平分线与直线 OS 相交于 T 。求证:
 L, H, S, T 四点共圆。



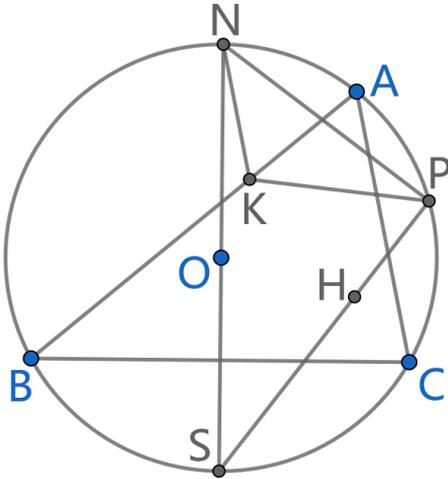
例 6. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $AB = BC = AE$, 四边形 $BCDE$ 是矩形, 点 P, Q 分别在线段 AC, AD 上, $AP = DQ$ 。点 X 是 $\triangle APQ$ 的垂心。求证: B, X, E 三点共线。



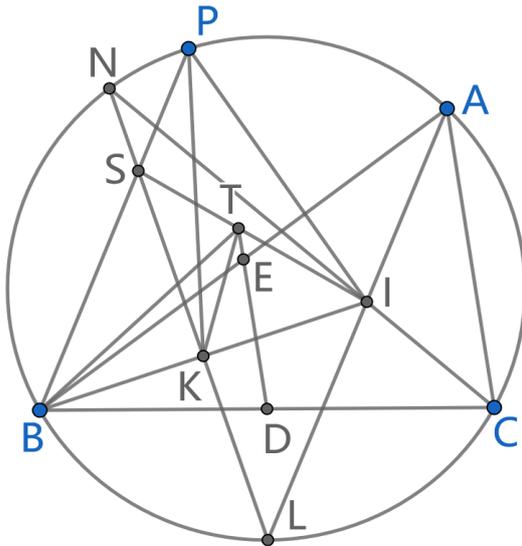
三角形的五心-2

例 7. 非等腰锐角 $\triangle ABC$ ($AB > AC$) 内接于 $\odot O$, NS 是 $\odot O$ 的直径, $NS \perp BC$, 点 N 和 A 在 BC 的同侧. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 直线 SH 与 $\odot O$ 相交于 S, P 两点. 点 K 在

直线 AB 上, $NK \parallel AC$. 求证: $\angle KPN = \frac{1}{2} \angle BAC$.

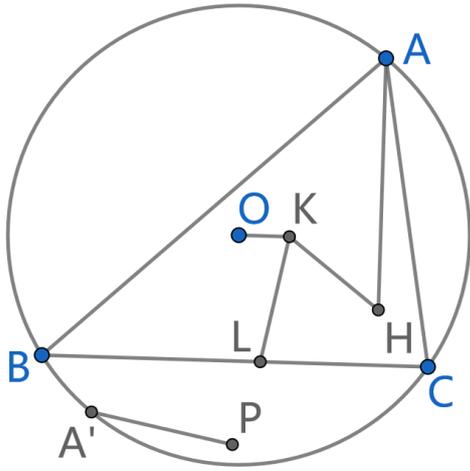


例 8. $\triangle ABC$ 内接于圆 ω , 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, K 是线段 BI 的中点. 点 L, N 分别是弧 BC 和弧 AB 的中点, 点 D, E 分别是线段 BC, AB 的中点. 点 P 在 ω 上, 直线 BP, NL 相交于 S , 直线 IS, DE 相交于 T . 求证: $\angle BTK = \angle IPK$.

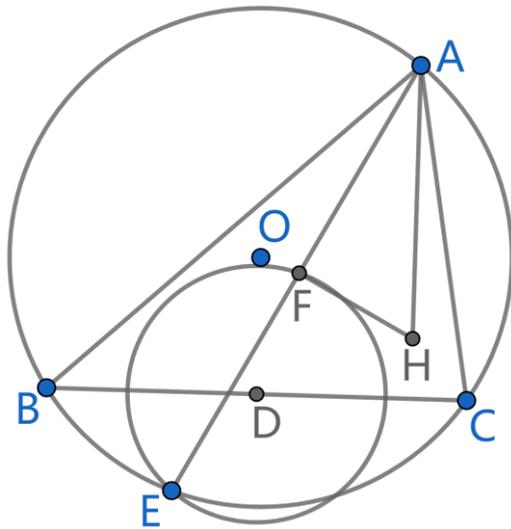


三角形的五心-2

例 9. $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心， AA' 是 $\odot O$ 的直径。点 P 是 $\triangle BOC$ 的外心，点 K 是 $\triangle AOH$ 的垂心。点 L 在直线 BC 上， $LO = LH$ 。求证： $KL \perp PA'$ 。

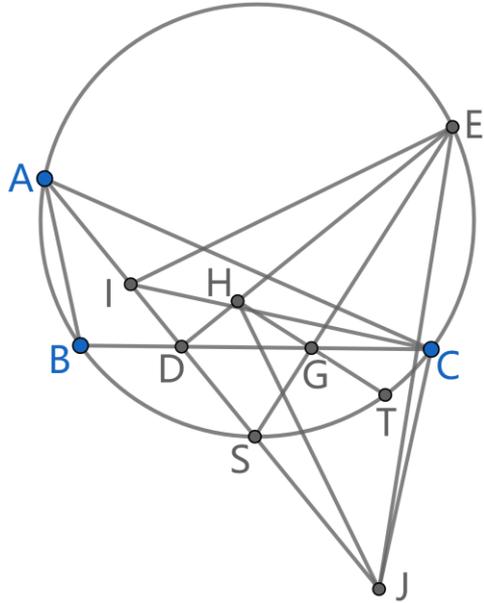


例 10. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆。点 D 是线段 BC 的中点。以 D 为圆心作 $\odot D$ 。点 E 是 $\odot O$ 与 $\odot D$ 的一个交点， AE 交 $\odot D$ 于 F （异于 E ）。求证： $HF \perp AF$ 。

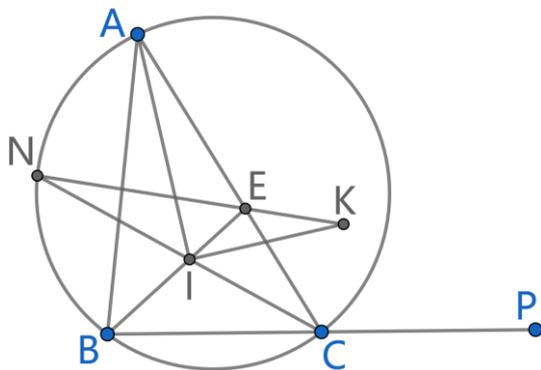


三角形的五心-2

例 11. $\triangle ABC$ 内接于圆 ω ，点 I, J 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和 A -旁心， IJ 与 BC 、 ω 分别交于 D 和 S ，点 E 在 ω 上， $DE \perp IJ$ ，线段 ES, BC 相交于 G ， H 是 $\triangle EIJ$ 的垂心，延长 HG 与 ω 相交于 T 。求证： G 是 TH 的中点。

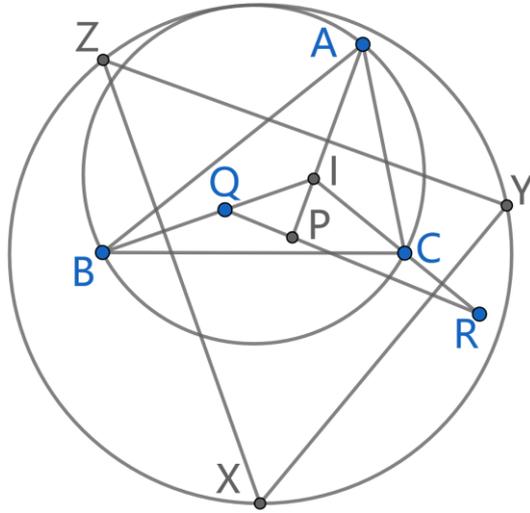


例 12. 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，直线 BI, AC 相交于 E ，直线 CI 交 $\odot(ABC)$ 于 N （异于 C ）。点 K 在直线 NE 上， $AI \perp IK$ ， P, B 两点关于 C 对称。求证： B, I, K, P 四点共圆。



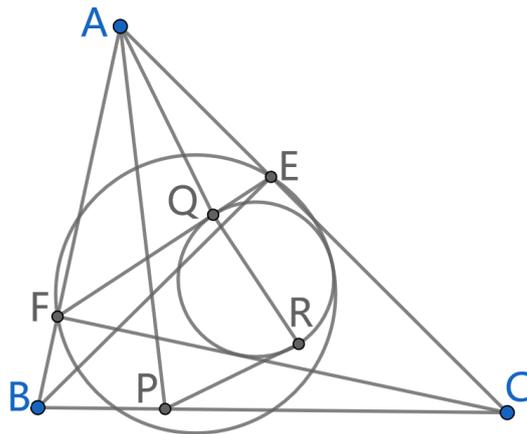
三角形的五心-2

例 13. 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，一直线分别与直线 AI, BI, CI 交于 P, Q, R 。线段 AP, BQ, CR 的中垂线围成 $\triangle XYZ$ 。求证： $\odot(ABC)$ 与 $\odot(XYZ)$ 相切。



例 14. BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高，点 P, Q 分别在线段 BC, EF 上， $\angle BAP = \angle CAQ$ 。

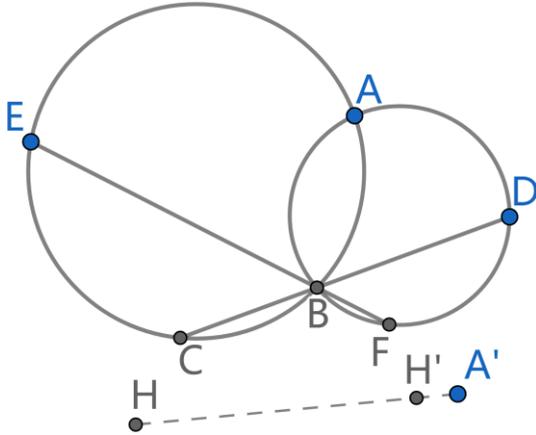
R 是平面上一点， $PR \perp AQ$ ， $QR \perp EF$ 。求证：以 QR 为直径的圆与 $\triangle ABC$ 的九点圆相切。



三角形的五心-2

例 15. 两圆交于 A, B 两点, 过 B 的两条直线分别与两圆交于点 C, D 和点 E, F 。

$\triangle BCE, \triangle BDF$ 的垂心分别为 H, H' 。求证: A 关于 CD 的对称点在直线 HH' 上。



例 16. 已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, DH 中垂线分别交 AB, AC 于

点 E, F 。求证: A, E, D, F 四点共圆。

