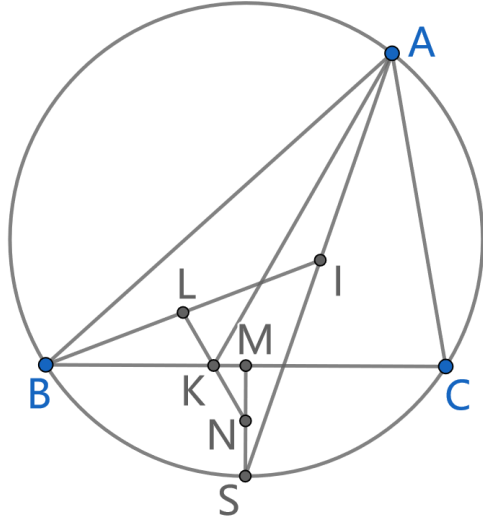


三角形的五心-2

三角形的五心-2

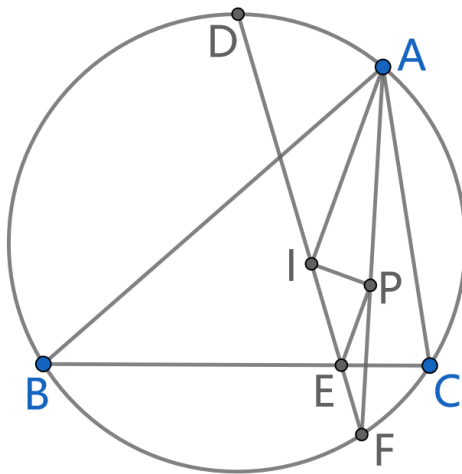
例 1. 点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心,  $S$  是  $\odot(ABC)$  的弧  $BC$  的中点. 点  $L, M, N$  分别是线段

$BI, BC, MS$  的中点,  $LN$  与  $BC$  相交于  $K$ . 求证:  $\angle AKL = \angle BKL$ .



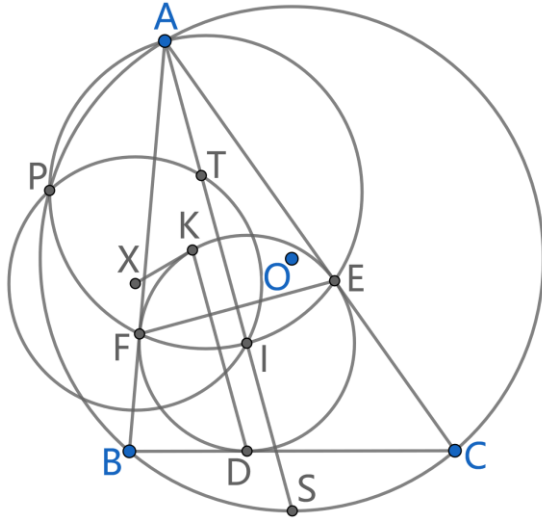
例 2.  $\triangle ABC$  内接于圆  $\omega$ , 点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心. 点  $D$  是  $\omega$  上的弧  $BAC$  的中点, 延长

$DI$  分别交  $BC$  和  $\omega$  于  $E, F$ . 点  $P$  在  $AF$  上,  $EP \parallel AI$ . 求证:  $PI \perp AI$ .

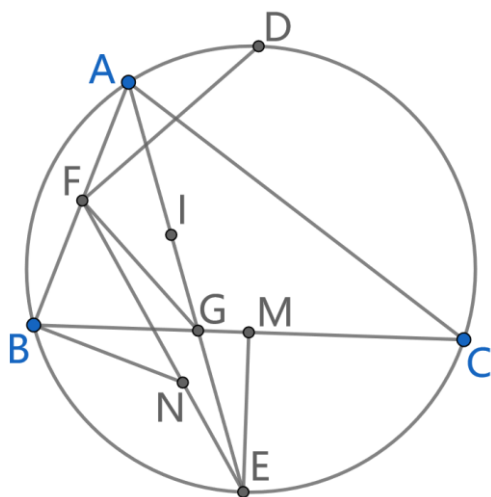


三角形的五心-2

例 3.  $\triangle ABC$  的内切圆  $\odot I$  分别切  $BC, CA, AB$  于点  $D, E, F$ 。点  $K$  在  $\odot I$  上,  $DK \perp EF$ 。延长  $AI$  交  $\triangle ABC$  的外接圆  $\odot O$  于  $S$ , 点  $T$  是  $S$  关于  $I$  的对称点。过  $A, E, F$  三点作圆交  $\odot O$  于  $P (P \neq A)$ 。过  $I, P, T$  三点作圆  $\omega$ , 点  $X$  是  $\omega$  的圆心且  $X \neq K$ 。求证:  $XK$  与  $\odot I$  相切。

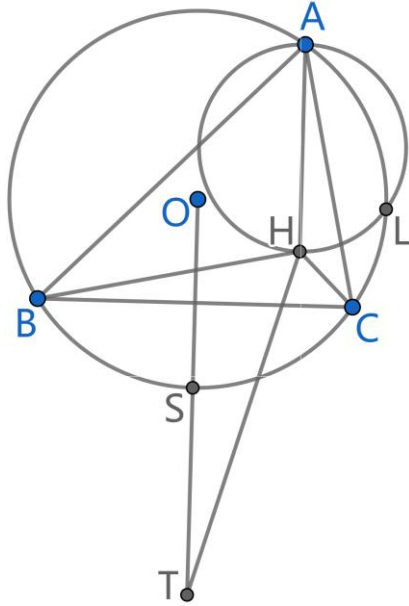


例 4. (2018, 高联 A 卷)  $\triangle ABC$  为锐角三角形,  $AB < AC$ ,  $M$  是  $BC$  的中点。  $D, E$  分别是  $\triangle ABC$  的外接圆上弧  $BAC$  和弧  $BC$  的中点。  $F$  是  $\triangle ABC$  的内切圆与  $AB$  的切点。  $AE, BC$  相交于  $G$ , 点  $N$  在  $EF$  上,  $BN \perp AB$ 。求证: 若  $BN = EM$ , 则  $DF \perp FG$ 。

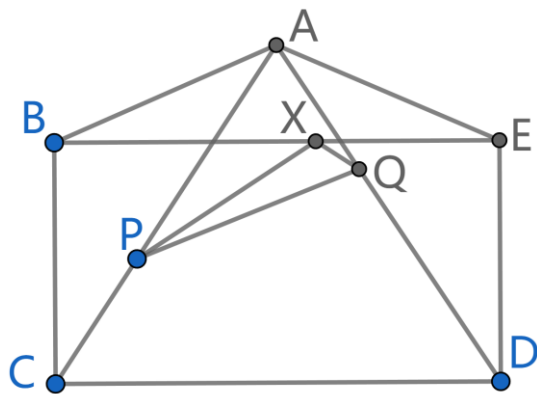


三角形的五心-2

例 5.  $H$  是非等腰锐角  $\triangle ABC$  的垂心,  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆, 以  $AH$  为直径的圆与  $\odot O$  相交于  $A, L$ 。点  $S$  是弧  $BC$  的中点,  $\angle BHC$  的平分线与直线  $OS$  相交于  $T$ 。求证:  
 $L, H, S, T$  四点共圆。



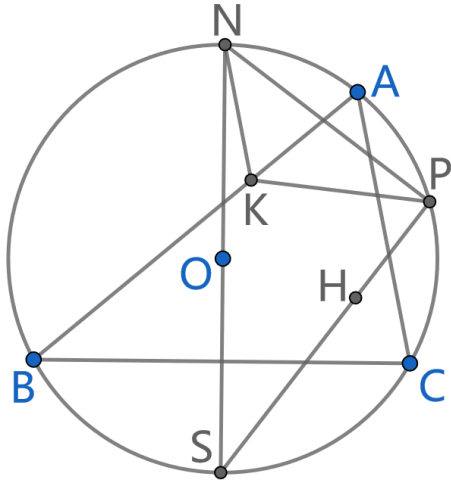
例 6. 在凸五边形  $ABCDE$  中,  $AB = BC = AE$ , 四边形  $BCDE$  是矩形, 点  $P, Q$  分别在线段  $AC, AD$  上,  $AP = DQ$ 。点  $X$  是  $\triangle APQ$  的垂心。求证:  $B, X, E$  三点共线。



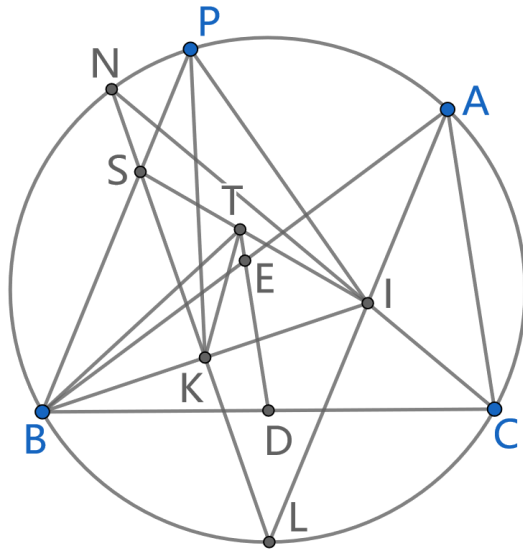
三角形的五心-2

例 7. 非等腰锐角  $\triangle ABC$  ( $AB > AC$ ) 内接于  $\odot O$ ,  $NS$  是  $\odot O$  的直径,  $NS \perp BC$ , 点  $N$  和  $A$  在  $BC$  的同侧。  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心, 直线  $SH$  与  $\odot O$  相交于  $S, P$  两点。 点  $K$  在

直线  $AB$  上,  $NK \parallel AC$ 。 求证:  $\angle KPN = \frac{1}{2} \angle BAC$ 。

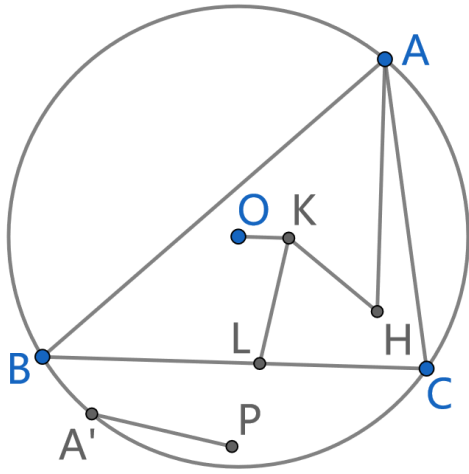


例 8.  $\triangle ABC$  内接于圆  $\omega$ , 点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心,  $K$  是线段  $BI$  的中点。 点  $L, N$  分别是弧  $BC$  和弧  $AB$  的中点, 点  $D, E$  分别是线段  $BC, AB$  的中点。 点  $P$  在  $\omega$  上, 直线  $BP, NL$  相交于  $S$ , 直线  $IS, DE$  相交于  $T$ 。 求证:  $\angle BTK = \angle IPK$ 。

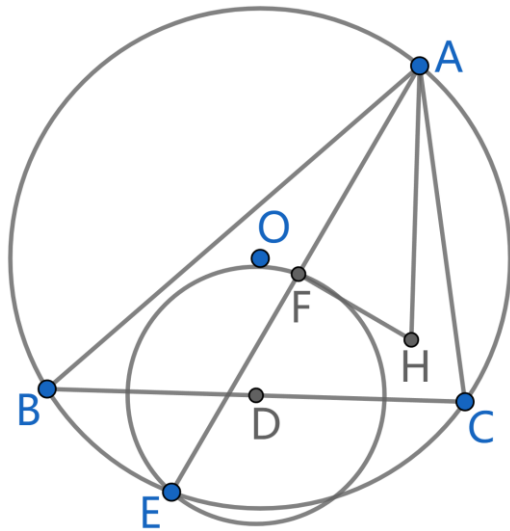


三角形的五心-2

例 9.  $\triangle ABC$  内接于  $\odot O$ ，点  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心， $AA'$  是  $\odot O$  的直径。点  $P$  是  $\triangle BOC$  的外心，点  $K$  是  $\triangle AOH$  的垂心。点  $L$  在直线  $BC$  上， $LO = LH$ 。求证： $KL \perp PA'$ 。

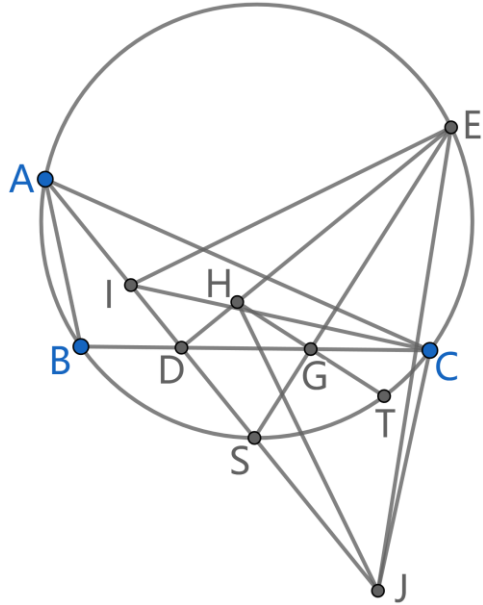


例 10.  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心， $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆。点  $D$  是线段  $BC$  的中点。以  $D$  为圆心作  $\odot D$ 。点  $E$  是  $\odot O$  与  $\odot D$  的一个交点， $AE$  交  $\odot D$  于  $F$ （异于  $E$ ）。求证： $HF \perp AF$ 。

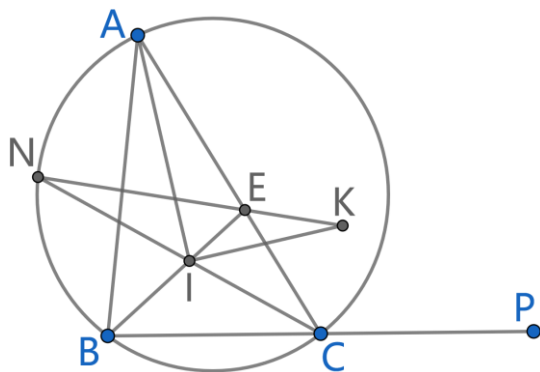


三角形的五心-2

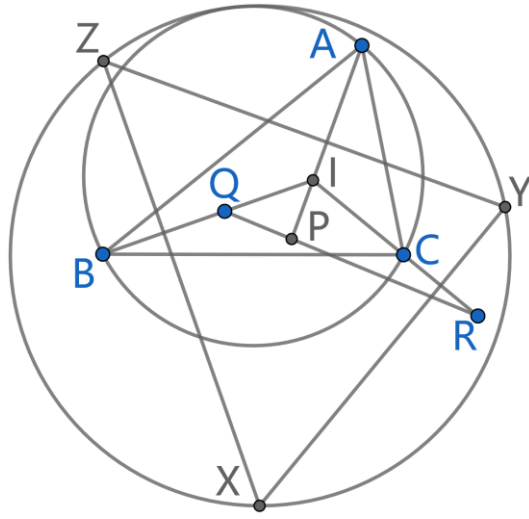
例 11.  $\triangle ABC$  内接于圆  $\omega$ ，点  $I, J$  分别是  $\triangle ABC$  的内心和  $A$ -旁心， $IJ$  与  $BC$ 、 $\omega$  分别交于  $D$  和  $S$ ，点  $E$  在  $\omega$  上， $DE \perp IJ$ ，线段  $ES, BC$  相交于  $G$ ， $H$  是  $\triangle EIJ$  的垂心，延长  $HG$  与  $\omega$  相交于  $T$ 。求证： $G$  是  $TH$  的中点。



例 12. 点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心，直线  $BI, AC$  相交于  $E$ ，直线  $CI$  交  $\odot(ABC)$  于  $N$ （异于  $C$ ）。点  $K$  在直线  $NE$  上， $AI \perp IK$ ， $P, B$  两点关于  $C$  对称。求证： $B, I, K, P$  四点共圆。

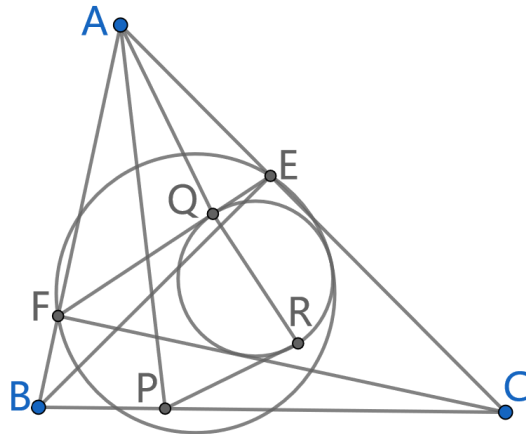


例 13. 点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心，一直线分别与直线  $AI, BI, CI$  交于  $P, Q, R$ 。线段  $AP, BQ, CR$  的中垂线围成  $\triangle XYZ$ 。求证： $\odot(ABC)$  与  $\odot(XYZ)$  相切。



例 14.  $BE, CF$  是  $\triangle ABC$  的两条高，点  $P, Q$  分别在线段  $BC, EF$  上， $\angle BAP = \angle CAQ$ 。

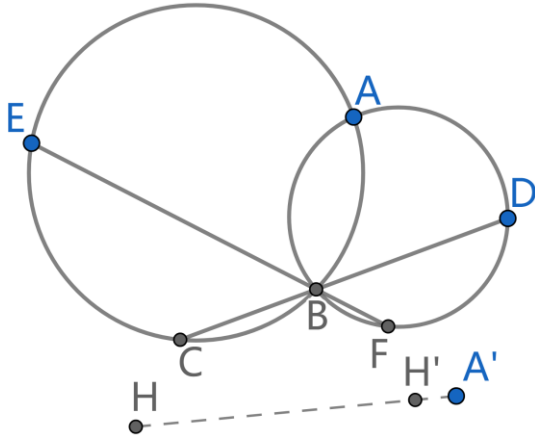
$R$  是平面上一点， $PR \perp AQ$ ， $QR \perp EF$ 。求证：以  $QR$  为直径的圆与  $\triangle ABC$  的九点圆相切。



三角形的五心-2

例 15. 两圆交于  $A, B$  两点, 过  $B$  的两条直线分别与两圆交于点  $C, D$  和点  $E, F$ 。

$\triangle BCE, \triangle BDF$  的垂心分别为  $H, H'$ 。求证:  $A$  关于  $CD$  的对称点在直线  $HH'$  上。



例 16. 已知  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心,  $D$  在  $\triangle ABC$  的外接圆上,  $DH$  中垂线分别交  $AB, AC$  于

点  $E, F$ 。求证:  $A, E, D, F$  四点共圆。

