

代数选讲-2

例 1. 设 a, b, c 是非负实数, 满足 $a+b+c=3$ 。求证:

$$(1+a^2b)(1+b^2c)(1+c^2a) \leq 5+3abc。$$

例 2. 正实数 x, y, z 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ 。求证: $(x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{4}(xyz-1)$ 。

例 3. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, 且 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求 $F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j) \sqrt{x_i x_j}$ 的最大值。

例 4. 求最小的实数 c , 使得对任意正整数 $x \neq y$, 都有

$$\min\{\{\sqrt{x^2 + 2y}\}, \{\sqrt{y^2 + 2x}\}\} < c。$$

例 5. 求证: 对任意无理数 x , 都存在无穷多个正整数 n , 使得 $\{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$ 均大于

$$\frac{1}{n+1}。$$

例 6. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为实数, 求证: $\sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^n |x_i|。$

例 7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 求证:

$$\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 C \cos^2 A \leq \frac{1}{4}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)。$$

例 8. 正实数 x, y, z 满足 $xyz = x + y + z + 2$ 。求证:

$$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6。$$

例 9. 正实数 x, y, z 满足 $xyz = x + y + z + 2$ 。求证: $xyz(x-1)(y-1)(z-1) \leq 8$ 。

例 10. 正实数 x, y, z 满足 $xy + yz + zx + xyz = 4$ 。求证: $x + y + z \geq xy + yz + zx$ 。

例 11. 给定正实数 a, b, c ，求所有三元正实数组 (x, y, z) ，满足 $x + y + z = a + b + c$ ，

$$a^2x + b^2y + c^2z + abc = 4xyz。$$

例 12. (牛顿迭代) 设 $a > 0$, $f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$ 。给定初值 $x_0 \neq 0$, $n \geq 0$ 时,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}。求数列 \{x_n\}_{n \geq 0} 的通项。$$

例 13. 非负实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$ 。求证:

$$\sqrt{9 - 32xy} + \sqrt{9 - 32xz} + \sqrt{9 - 32yz} \geq 7。$$