初等不等式中的重要定理

一、知识要点

定义 1. 对 n 个正实数 $a_1,a_2,...,a_n$，定义它们的算术平均为 $A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$，几何平均为 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$，调和平均为 $H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$，平方平均为

$Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$。

定理 1.（均值不等式）对任意 n 个正实数 $a_1,a_2,...,a_n$，均成立下列不等式：

$H_n\le G_n\le A_n\le Q_n$。其中每个等号都当且仅当 $a_1=a_2=...=a_n$ 时成立。

注：均值不等式可以推广成下述加权形式：设 $p>1$，$\{a_i\}_{1\le i\le n},\{w_i\}_{1\le i\le n}$ 是正实数，满足

$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，则有 $(\sum_{i=1}^{n}w_ia_i^{-1})^{-1}\le\prod_{i=1}^{n}a_i^{w_i}\le\sum_{i=1}^{n}w_ia_i\le(\sum_{i=1}^{n}w_ia_i^p)^{\frac{1}{p}}$。其中每个等号都当且仅当

$a_1=a_2=...=a_n$ 时成立。

定理 2.（柯西不等式）设 $a_i,b_i\ (1\le i\le n)$ 为实数，则 $(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$。等号成立当且仅当 a_i 全为 0 或存在实数 λ 使得 $b_i=\lambda a_i\ (1\le i\le n)$。

推论 1. 设 $b_i>0,a_i\in\mathbb{R}\ (1\le i\le n)$，我们有 $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$。

推论 2.（闵可夫斯基不等式）设 $a_i,b_i\in\mathbb{R}\ (1\le i\le n)$，我们有

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}$。事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i)\ (1\le i\le n)$，那么上式即 $|\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_2|+...+|\boldsymbol{\alpha}_n|\ge|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+...+\boldsymbol{\alpha}_n|$，所以该不等式又称作三角不等式。

定理 3.（赫尔德不等式）若 $p,q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对任意正实数 $\{a_i\}_{1\le i\le n},\{b_i\}_{1\le i\le n}$ 都有 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{1/q}$。

推论 3.（卡尔松不等式）设 m,n 是正整数，对 mn 个正实数 a_{ij} $(1\le i\le m,1\le j\le n)$，有 $\prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^m)\ge(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij})^m$。$m=2$ 时即为柯西不等式。

定义 2.（函数的凹凸性）设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$。(1）若对任意的 $x,y\in[a,b]$ 以及 $t\in[0,1]$，都有 $tf(x)+(1-t)f(y)\ge f(tx+(1-t)y)$，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数（或凸函数）。(2）若将上述不等式方向变为 $tf(x)+(1-t)f(y)\le f(tx+(1-t)y)$，其余条件不变，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的上凸函数（或凹函数）。以上两种情形中，若 $x\ne y$ 时不等式总是严格成立，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格下凸（或上凸）函数。

性质 1. 下列性质对下凸函数和上凸函数都有着对应的陈述。(1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则 $f(x)$ 为下凸（上凸）函数当且仅当 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减（不增）。$f(x)$ 严格下凸（上凸）时，$f'(x)$ 严格单调增（减）。

(2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，则 $f(x)$ 为下凸（上凸）函数当且仅当 $x\in(a,b)$ 时 $f''(x)\ge0$（$f''(x)\le0$）。

(3）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，对 $t\in[a,b]$，设 $g_t(x)=f(t)+f'(t)(x-t)$ 是 $f(x)$ 在 $x=t$ 处的切线，则 $f(x)$ 为下凸（上凸）函数当且仅当对任意 $t\in[a,b]$，$f(x)\ge g_t(x)$（$f(x)\le g_t(x)$）对任意 $x\in[a,b]$ 均成立。

（4）定义在开区间(a,b)上的下凸（上凸）函数一定连续。注：若将定义域改成闭区间则不一定连续。

定理 3.（琴生不等式）（1）设 $f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数，则对任意

$x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$，和任意满足$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$的正实数$\{w_i\}_{1\le i\le n}$，都有

$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\le w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。

（2）若将条件中的 $f(x)$改为上凸函数，其余条件不变，也有类似的结论成立：

$f(w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n)\ge w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+...+w_nf(x_n)$。以上两种情形中，当

$f(x)$是严格下凸（上凸）函数时，等号成立当且仅当$x_1=x_2=...=x_n$。

定理 4.（排序不等式）设两列数$\{a_i\}_{1\le i\le n},\{b_i\}_{1\le i\le n}$满足$a_1\le a_2\le...\le a_n,b_1\le b_2\le...\le b_n$，

$\{t_i\}_{1\le i\le n}$是$\{1,2,...,n\}$的任意一个排列，我们有

$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+...+a_nb_{t_n}\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。也就是说，顺序和≥乱序和≥反序和。当且仅当$a_1=a_2=...=a_n$或$b_1=b_2=...=b_n$时等号成立。

引理 1（阿贝尔变换，又称分部求和法）设$\{x_i\}_{1\le i\le n},\{y_i\}_{1\le i\le n}$是两列数，

$S_k=\sum_{i=1}^{k}y_i\ (1\le k\le n)$，则$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})S_i+x_nS_n$。

定理 5.（切比雪夫不等式）设两列数$\{a_i\}_{1\le i\le n},\{b_i\}_{1\le i\le n}$满足$a_1\le a_2\le...\le a_n$，

$b_1\le b_2\le...\le b_n$，则$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)$

$\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$。

二、例题精讲

例 1.（Nesbitt 不等式）设 a,b,c 为正实数，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$。尝试用均值不等式，柯西不等式，琴生不等式，切比雪夫不等式给出不同的证明。

例 2. 已知 $a,b,c>0$，$a^2+b^2+c^2=14$，求证：$a^5+\frac{1}{8}b^5+\frac{1}{27}c^5\geq 14$。尝试用均值不等式和赫尔德不等式给出不同的证明。

例 3. 设 a,b,c 为正实数，求证：$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})\geq 8$。

例 4. 已知非负实数 x,y,z 满足 $2x+3y+5z=6$，求 x^2yz 的最大值。

例 5. 已知非负实数a,b,c,d，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$。

例 6. 已知$a,b,c\in(0,1)$，且满足$ab+bc+ca=1$。求证：

$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

例 7. 设正实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$。

例 8. 设非负实数 a,b,c,d 满足 $ab+bc+cd+da=1$。求证:

$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$。尝试用均值不等式和柯西不等式给出不同的证明。

例 9. 设正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$,求证:

$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}$。

例 10. 设 a,b,c 是正实数,求证: $\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0$。

例 11. 已知$(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$满.足“$a_{ij}=a_{ji}$，且对任意实数$x_1,x_2,...,x_n$，都有$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ge 0$，当且仅当$x_1=x_2=...=x_n=0$时等号成立”。求证：对任意实数$\{x_i\}_{1\le i\le n},\{y_i\}_{1\le i\le n}$，都有$(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j)^2\le(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j)(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j)$。

注：本题中满足引号所述条件的方阵$A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$即为正定矩阵。

例 12. 设x_i $(1\le i\le 5)$是正实数，满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$。求证：$\sum_{i=1}^{5}\frac{4}{4+x_i^2}\ge 1$。

例 13. 求最小的实数m，使得对满足$a+b+c=1$的任意正实数a,b,c，都有$m(a^3+b^3+c^3)\ge 6(a^2+b^2+c^2)+1$。

例 14. 设正实数a,b,c,d满足$a^2+b^2+c^2+d^2=4$，求证：

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$$。

例 15. 给定正整数n，$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$是正实数，满足对任意$1\leq k\leq n$，都有$a_1+a_2+...+a_k\leq k$。求证：$a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n}\leq 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$。

例 16. 在$\triangle ABC$中，求$\sin A+\sin B+\sin C$的最大值。