圆锥曲线的定义与性质

一、知识要点

1. 直线方程的各种形式：（1）点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；（2）斜截式：$y=kx+b$；

（3）两点式：$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；（4）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,(a,b\neq 0)$；（5）一般式：

$Ax+By+C=0$，其中实数A,B不同时为0，此时(A,B)是该直线的法向。

（6）直线的参数方程：$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\sin\alpha$，其中实数$t$为参数。

点到直线的距离公式：设点$P(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离为d，则

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

3. 圆方程的各种形式：（1）标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\ (R>0)$，其中$(a,b)$为圆心，$R$为半径；（2）一般方程：$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$，其中

$R^2=D^2+E^2-F>0$；（3）参数方程：$x=a+R\cos\alpha,y=b+R\sin\alpha$，其中$\alpha$为参数，$(a,b)$为圆心，$R$为半径。

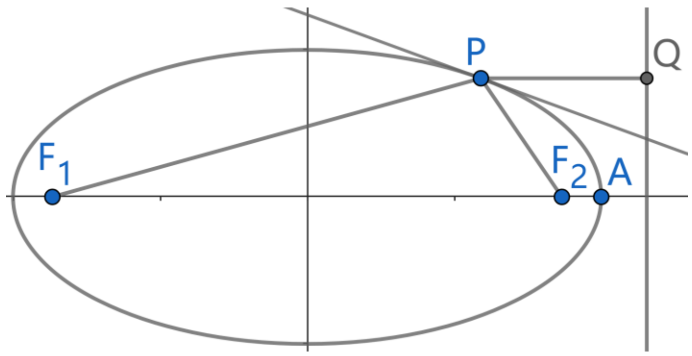
回忆：假设圆ω的标准方程和一般方程由（1）（2）给出，那么平面几何课中介绍的点$P(x_0,y_0)$到圆ω的幂为$\mathrm{Pow}(P,\omega)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2$

$=x_0^2+y_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$。

4. 椭圆的定义：平面内到两个定点的距离之和等于常数（该常数大于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为椭圆。

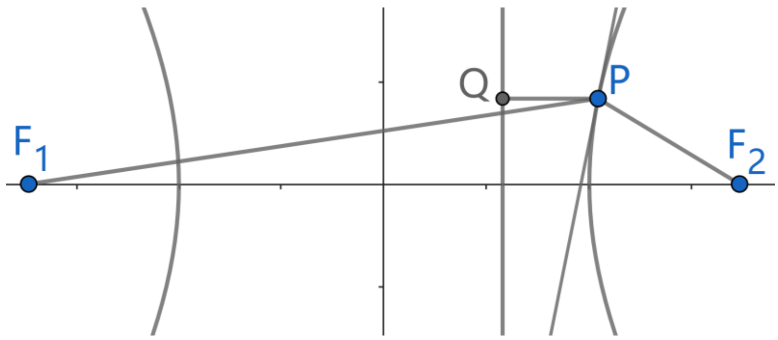
椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$。设$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则该椭圆的焦点为

$(\pm c,0)$，顶点$(\pm a,0)$，离心率$e=\frac{c}{a},0<e<1$。e越大，椭圆形状越扁平，e越小，椭圆形状越接近圆。



5. 双曲线的定义：平面内到两个定点的距离之差等于非零常数（该常数小于两个定点之间的距离）的点的轨迹称为双曲线。

双曲线的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$；设 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的焦点为 $(\pm c,0)$，顶点 $(\pm a,0)$，离心率 $e=\dfrac{c}{a},e>1$。e 越大，双曲线形状越接近两条平行直线，e 越小，双曲线形状越接近两条方向相反的射线。称直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 是双曲线的两条渐近线。



6. 椭圆与双曲线的第二定义：到定点与定直线的距离之比为常数 e 的点的轨迹为：

（1）当 $0<e<1$ 时，轨迹为离心率为 e 的椭圆，定点为椭圆的一个焦点；

（2）当 $e>1$ 时，轨迹为离心率为 e 的双曲线，定点为双曲线的一个焦点。

称其中的定直线为椭圆和双曲线的准线。当定点为左焦点 $(-c,0)$ 时，准线方程为 $x=-\dfrac{a^2}{c}$；当定点为右焦点 $(c,0)$ 时，准线方程为 $x=\dfrac{a^2}{c}$。

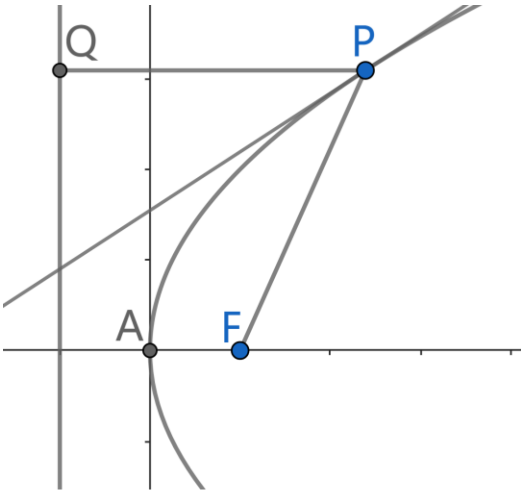
称二次曲线上一点 $P(x_0,y_0)$ 到一个焦点的距离为焦半径。对于左焦点 F_1，焦半径 $|PF_1|=|a+ex_0|$；对于右焦点 F_2，焦半径 $|PF_2|=|a-ex_0|$。

注：作为一种特殊的椭圆，圆的离心率为$e=0$，但它没有准线，不能用椭圆的第二定义来描述。

7. 抛物线的定义：平面内到定点与定直线距离相等的点的轨迹称为抛物线。

抛物线的标准方程：$x^2=2py$ 或 $y^2=2px$，其中 p 为定点到定直线的距离，即焦准距。

前者的对称轴是 y 轴，后者的对称轴是 x 轴，二者的顶点都在原点。抛物线 $x^2=2py$ 的焦点坐标为 $(0,\dfrac{p}{2})$，准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$。抛物线 $y^2=2px$ 的焦点坐标为 $(\dfrac{p}{2},0)$，准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$。抛物线的离心率为 $e=1$。



8. 圆锥曲线的光学性质：（1）椭圆：从某个焦点出发的光线经椭圆反射后，反射光线通过另一个焦点。（2）双曲线：从某个焦点出发的光线经双曲线反射后，反射光线的延长线通过另一个焦点。（3）抛物线：从焦点出发的光线经抛物线反射后，反射光线与抛物线的对称轴平行。

9. 过圆锥曲线上一点的切线方程：设Γ为圆锥曲线，$P(x_0,y_0)$是Γ上的一点。当定义Γ的方程为下列情形时，Γ在点P处的切线l的方程如下：

（1）圆 $\Gamma: x^2+y^2=r^2$，则 $l: x_0x+y_0y=r^2$；

（2）圆 $\Gamma:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则 $l:(x_0-a)(x-a)+(y_0-a)(y-a)=r^2$；

（3）抛物线 $\Gamma: y^2=2px$，则 $l: y_0y=p(x+x_0)$；

（4）抛物线 $\Gamma: x^2=2py$，则 $l: x_0x=p(y+y_0)$；

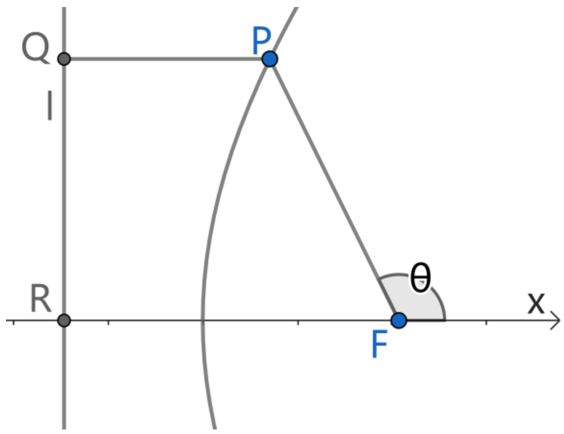
（5）椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则 $l:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

（6）双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则 $l:\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

（7）一般圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则

$l: Ax_0x+B(x_0y+xy_0)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$。

10. 极坐标下圆锥曲线的方程：动点 P 到定点 F 的距离与其到定直线 l 的距离之比为一定常数 $e>0$，则 P 的轨迹为一条圆锥曲线 Γ。此时 F 为 Γ 的焦点，l 为 Γ 的准线，设它们的位置关系如图，x 轴垂直于 l，$\theta=\angle PFx$。设 $p=d(F,l)$ 为 Γ 的焦准距，$r=|PF|$，则 $d(P,l)=d(F,l)+r\cos\theta$，$r=ed(P,l)=e(p+r\cos\theta)$，于是 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，这是极坐标下（除了圆以外的）圆锥曲线的统一方程。



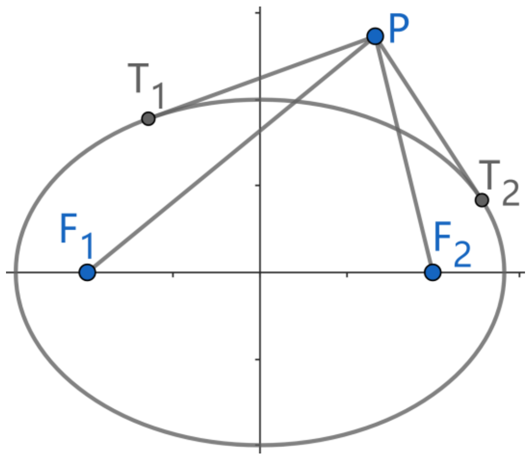
二、例题精讲

例 1. 已知双曲线$C:3x^2-y^2=3a^2$，F_1,F_2分别为C的左右焦点，A为C的左顶点，Q为第一象限内C上任意一点。是否存在常数$k>0$，使得$\angle QF_2A=k\angle QAF_2$恒成立？若存在，求出$k$的值；若不存在，请说明理由。

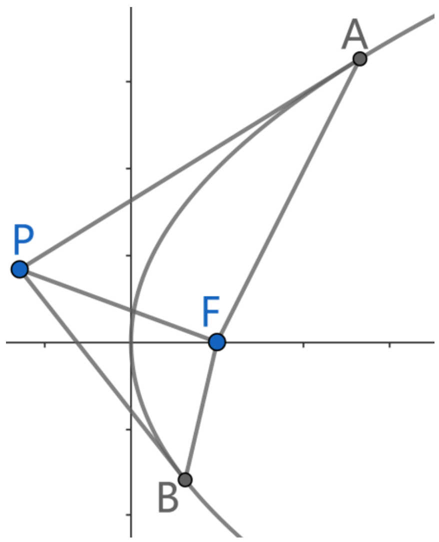
例 2. 过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$上的定点$A(a,b)$引抛物线的两条弦AP,AQ。求证：$AP\perp AQ$的充要条件是直线PQ过定点$M(2p+a,-b)$。

例 3. 已知l是过椭圆$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上一动点$P$的椭圆的切线。过椭圆左焦点$F_1$作$l$的垂线，求垂足的轨迹方程。

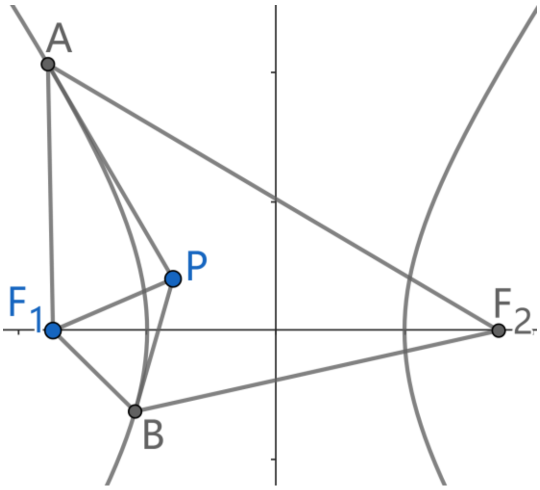
例 4. 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点，l_1, l_2 是该椭圆过椭圆外一点 P 的两条切线，切点分别为 T_1, T_2。求证：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$。

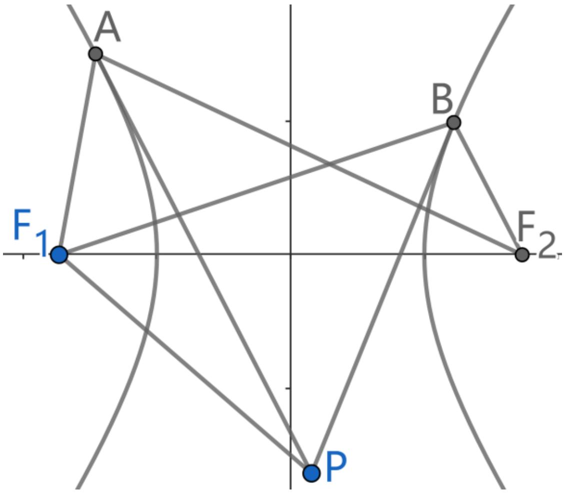


例 5. 已知抛物线外任意一点 P，过 P 作 PA, PB 切抛物线于 A, B，抛物线的焦点为 F，连接 PF, FA, FB，求证：$\angle AFP=\angle BFP$。



例 6. 已知双曲线外一点 P，过 P 作 PA,PB 切双曲线于 A,B，设 F_1,F_2 为双曲线的两焦点，连接 $PF_1,PF_2,AF_1,AF_2,BF_1,BF_2$。求证：（1）若 A,B 在双曲线的同一支上，则 $\angle AF_1P=\angle BF_1P,\angle AF_2P=\angle BF_2P$；（2）若 A,B 在双曲线的两支上，则 $\angle AF_1P+\angle BF_1P=\pi,\angle AF_2P+\angle BF_2P=\pi$。





例 7. 一张纸上画有半径为 R 的圆 O 和圆内一定点 A，且 $OA=a$。折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与 A 点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕。当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合。

例 8. 已知斜率为1的直线l与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$相交于$B,D$两点，且$BD$的中点为$M(1,3)$。（1）求$C$的离心率；（2）设$C$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$|DF|\cdot|BF|=17$。求证：过$A,B,D$三点的圆与$x$轴相切。

例 9. 设F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点，$l$是该椭圆的一条切线，$H_1,H_2$分别是$F_1,F_2$在$l$上的垂足。求证：$|F_1H_1|\cdot|F_2H_2|=b^2$。