

概率与期望-1

一、知识要点

1. (1) 样本点：一次试验（例如掷骰子），可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件。

(2) 样本空间：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体。

(3) 随机事件：样本空间的子集称为随机事件，简称事件。

2. (1) 必然事件：在试验中必然发生的事件，即样本空间 I 自身，它的概率为1，即 $P(I)=1$ 。

(2) 不可能事件：不可能发生的事件，即空集 \emptyset 。它发生的概率为0，即 $P(\emptyset)=0$ 。

(3) 互斥事件：事件 A, B 不能同时发生，即 $A \cap B = \emptyset$ ，则称 A, B 为互斥事件，也称为互不相容的事件。

(4) 对立事件：如果事件 A, B 满足 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = I$ ，那么 A, B 称为对立事件，并将 B 记为 \bar{A} 。我们有一个常用公式 $P(\bar{A})=1-P(A)$ 。

(5) 和事件： $A \cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件。

(6) 积事件： $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件，也简记为 AB 。

3. 概率：概率是样本空间 I 中的一种测度，即对每一个事件 A ，有一个实数与它对应，记为 $P(A)$ ，它满足以下三条性质：(1) (非负性) $P(A) \geq 0$ ；(2) $P(I)=1, P(\emptyset)=0$ ；

(3) (可加性) 在 A, B 为互斥事件时， $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

以上三条性质是概率的定义，除此之外，概率还满足如下性质：(4) 如果 $A \subset B$ ，那么 $P(A) \leq P(B)$ ；(5) 设 A, B 是一次随机试验中的两个事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)。$$

4. (1) 古典概型：如果试验有 n 种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于 $\frac{1}{n}$ 。

(2) 频率：在同样的条件下进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，那么就说 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$ 。

5. (1) 条件概率：在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率称为条件概率，记为

$$P(B|A)。我们有 P(AB) = P(A)P(B|A)，即 P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}。$$

(2) 独立事件：如果事件 A 是否发生，对于事件 B 的发生没有影响，即

$$P(B|A) = P(B)，那么称 A, B 为独立事件。这时 P(AB) = P(A)P(B)，且$$

$$P(A|B) = P(A)。$$

6. (1) 全概率公式：如果样本空间 I 可以分拆为 B_1, B_2, \dots, B_n ，即

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = I，且 B_i \cap B_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq n)，那么事件 A 发生的概率为$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)。$$

(2) 贝叶斯公式：设 B_1, B_2, \dots, B_n 是 I 的分拆，在已知所有的 $P(B_i)$ 与

$$P(A|B_i) (1 \leq i \leq n) 时，可用公式 P(B_j|A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} 求出$$

$$P(B_j|A)。它的简单形式为 P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}，其中 P(A) \neq 0。$$

7. (1) 随机变量：随机变量 X 是样本空间 I 上的函数，即对样本空间 I 中的每一个样本点 e ，都有一个确定的实数 $X(e)$ 与 e 对应。 $X = X(e)$ 称为随机变量。

(2) 数学期望：设 X 是随机变量，则称 $E(X) = \sum_{e \in I} X(e)P(e)$ 为 X 的数学期望，其中 e

跑遍样本空间 I 中的所有样本点， $P(e)$ 是 e 的概率。它满足如下性质：(i) 若 a 是常数，

则 $E(aX) = aE(X)$ ；(ii) 如果 X, Y 是两个随机变量，则 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 。上述两个性质称为期望的线性性质。

8. (1) 称可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量为离散型随机变量。

(2) 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i, 1 \leq i \leq n$, 则将 $P(X = x_i) = p_i, 1 \leq i \leq n$ 称为 X 的分布列。它也可以用表格表示。

(3) 离散型随机变量 X 的数学期望 (或均值) 定义为 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$, 其中 X 的分布列

由 (2) 给出。若 X, Y 是独立的离散型随机变量, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$ 。

(4) 离散型随机变量 X 的方差定义为 $D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$, 它满足

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2。X 的标准差定义为 $\sqrt{D(X)}$ 。$$

9. (1) 伯努利分布: 又称两点分布或 0-1 分布, 它的分布列为

$$P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p, 0 \leq p \leq 1。此时 X 的均值和方差分别为$$

$$E(X) = p, D(X) = p(1-p)。$$

(2) 二项分布 $B(n, p)$: 它的分布列为 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$ 。此时 X

的均值和方差分别为 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$ 。伯努利分布是二项分布中 $n=1$ 的特殊情况。

(3) 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立同分布的随机变量, 都服从伯努利分布 $B(1, p)$, 那么它们的

和服从二项分布 $B(n, p)$, 即 $\sum_{k=1}^n X_k \sim B(n, p)$ 。

二、例题精讲

例 1. 一位父亲有两个孩子, 至少一个孩子是男孩, 那么另一个孩子也是男孩的概率是多少?

例 2. 在蒙蒂·霍尔主持的电视游戏节目中，参赛者必须在三道门帘中选一道。其中一道门帘之后有一辆汽车，其余两道门帘后面是山羊。参赛者选择之后，蒙蒂·霍尔会增加悬念：在参赛者没有选择的门帘之中，至少有一道门帘背后是山羊。然后，蒙蒂·霍尔会将这道背后是山羊的门帘打开。现在剩下两道门帘，其中一道后面有汽车，另一道后面则有山羊。这时，蒙蒂·霍尔就会向参赛者提出一个新选择：他可以维持自己的选择或者换一道门帘。这位参赛者应该怎么做？他应该遵循一开始的直觉，还是应该改变主意？

例 3. 假设硬币是均匀的，即出现正反面的概率都是 $\frac{1}{2}$ 。现将一枚硬币抛掷 3 次。(1) 求恰有一次出现正面的概率；(2) 至少有一次出现正面的概率。

例 4. 假设每个骰子都是均匀的，六个面上分别刻有 1,2,3,4,5,6 点，即出现 1 到 6 点的概率都是 $\frac{1}{6}$ 。求以下事件的概率：(1) 掷一只骰子，出现的点数大于 4；(2) 掷两只骰子，至少出现一个一点；(3) 掷三只骰子，三只骰子上出现的点数的和大于 15。

例 5. 在桥牌中，52 张扑克牌平均分给甲、乙、丙、丁四人。甲的 13 张牌同花色的概率是多少？试用斯特林近似公式估计这个概率。

例 6. 一只骰子需要掷多少次才能使掷出 1 点的概率大于 $\frac{1}{2}$ ？

例 7. 袋子里装有 4 只红球 2 只黑球, 大小完全相同。抽两次球, 每次抽一只, 抽出后不再放回。求以下事件的概率: (1) 取出的两只球都是红球; (2) 取出的两只球颜色相同;

(3) 取出的两只球中至少有一只是红球。

如果第一次抽出的球, 看过后又放回去, 上述概率又各是多少?

例 8. 假设每个人的生日均匀且独立地分布在平年的 365 天, 问至少要有几个人, 才能使得存在两个人同月同日出生的概率大于 $\frac{1}{2}$? 试用斯特林近似公式估计 365 个人生日两两不同的概率。

例 9. 在 1 ~ 2000 中随机地取一个数, 问取到的整数既不被 6 整除, 又不被 8 整除的概率是多少?

例 10. 掷两只骰子, 连掷四次, 恰好出现两次两只骰子相同的概率是多少?

例 11. 设 A 表示事件“试验反应为阳性”, B 表示事件“患有癌症”, 已知

$P(B) = 0.005, P(A|B) = 0.95, P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.95$ 。如果某人对这种试验反应为阳性, 求他患有癌症的概率。

三、拓展阅读

1. 斯特林近似公式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$, 也可以写为 $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n, n \rightarrow \infty$. $n \geq 1$

时, 设 $a_n = \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{2} \ln n - n(\ln n - 1)$, 先证明 $\{a_n\}$ 单调减且有下界: $n \geq 2$ 时, 因为

$$\int_{n-1}^n \ln x dx = [x(\ln x - 1)]_{n-1}^n = n(\ln n - 1) - (n-1)(\ln(n-1) - 1), \text{ 且 } \ln x \text{ 上凸, 所以}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) - \int_{n-1}^n \ln x dx = \frac{1}{2} \int_{n-1}^n (\ln(n-1) + \ln n - \ln x$$

$-\ln(2n-1-x)) dx < 0$, $\{a_n\}$ 单调减. 因为 $n-1 \leq x \leq n$ 时,

$$\frac{1}{2}(\ln x + \ln(n-1-x)) < \ln(n - \frac{1}{2}), \text{ 所以 } a_n - a_{n-1} > \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) - \ln(n - \frac{1}{2})$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln \frac{2n-1}{2n-2} + \ln \frac{2n-1}{2n}] > -\frac{1}{2}[\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}] = -\frac{1}{4n(n-1)},$$

$a_n > a_1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k(k-1)} = 1 - \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n}) > \frac{3}{4}$, $\{a_n\}$ 有下界. 由单调有界原理, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = A$, 下面证明 $A = \sqrt{2\pi}$. 由正弦函数的无穷乘积公式,

$$\sin x = x \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}), \text{ 令 } x = \frac{\pi}{2}, \text{ 我们有 } \frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{4n^2}) = \prod_{n \geq 1} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)!}{(2n)!!^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n} n!^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A\sqrt{2n}(\frac{2n}{e})^{2n} \cdot A\sqrt{2n+1}(\frac{2n+1}{e})^{2n+1}}{2^{4n} [A\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n]^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4A^{-2} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} (1 + \frac{1}{2n})^{2n+1} e^{-1} = 4A^{-2}, \text{ 因}$$

为 $A > 0$, 所以 $A = \sqrt{2\pi}$.