计数原理与排列组合

一、知识要点

1. 加法原理：完成一件事的方法可分成 n 个互不相交的类，在第一类到第 n 类分别有 $m_1, m_2, ..., m_n$ 种方法，则完成这件事总共有 $m_1 + m_2 + .. + m_n$ 种方法。应用加法原理的关键在于通过适当的分类，使得每一类都相对易于计数。

2. 乘法原理：完成一件事的方法有 n 个步骤，从第一步到第 n 步分别有 $m_1, m_2, ..., m_n$ 种方法，则总共完成这件事有 $m_1 m_2 ... m_n$ 种方法。应用乘法原理的关键在于通过适当地分步，使得每一步都相对易于计数。

3. 无重排列与组合：（1）无重排列：从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素排成一列，不同的排列种数称为排列数，记为 A_n^m 或 P_n^m。由乘法原理得到

$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$。特别地，$A_n^n = n!$。

（2）无重组合：从 n 个不同元素中任取 m 个元素并为一组，不同的组合种数称为组合数，记为 $\dbinom{n}{m}$ 或 C_n^m。它的公式为 $\dbinom{n}{m} = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。它满足 $\dbinom{n}{m} = \dbinom{n-1}{m} + \dbinom{n-1}{m-1}, 0 \le m \le n-1$。

4. 可重排列与组合：（1）可重排列：从 n 个不同元素中可重复地任取 m 个元素排成一列，不同的排列种数有 n^m 种。

（2）有限个重复元素的全排列：设 n 个元素由 k 个不同元素 $a_1, a_2, ..., a_k$ 组成，分别有 $n_1, n_2, ..., n_k$ 个（$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$），那么这 n 个元素的全排列数为

$\dbinom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$。$k = 2$ 时，我们有 $\dbinom{n}{n_1, n_2} = \dbinom{n}{n_1} = \dbinom{n}{n_2}$。

（3）可重组合：从 n 个不同元素中，任意可重复地选取 m 个元素，称为 n 个不同中取 m 个元素的可重组合，种数为 $\dbinom{n+m-1}{m}$。

（4）多元线性不定方程的正整数解个数：设 k, n 为正整数，则方程 $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ 的

正整数解个数为$\binom{n-1}{k-1}$。

5. 圆排列：在n个不同元素中，每次取出m个元素排在一个圆环上，叫做一个圆排列（或环状排列）。圆排列有三个特点：（1）无头无尾；（2）按照同一方向旋转后仍是同一排列；（3）如果两个圆排列无论如何旋转都不相同，那么这两个圆排列才不相同。
在n个元素中，每次取出m个不同的元素进行圆排列，种数为

$$\frac{A_n^m}{m}=\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m}=\frac{n!}{m(n-m)!}。$$

6. 容斥原理：设$A_1,A_2,...,A_n$为有限集合，用$|A_i|$表示集合A_i中的元素个数，那么

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-...$$

$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|。$$

7.（1）二项式定理：设n为非负整数，则$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$。

（2）多项式定理（multinomial theorem）：对任意正整数m和非负整数n，我们有

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_m=n\\a_1,a_2,...,a_m\ge 0}}\binom{n}{a_1,a_2,...,a_m}x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_m^{a_m},$$

其中求和取遍所有满足$a_1+a_2+...+a_m=n$的非负整数$a_1,a_2,...,a_m$。多项式系数（multinomial coefficient）的定义在有限个重复元素的全排列中出现过：

$$\binom{n}{a_1,a_2,...,a_m}=\frac{n!}{a_1!a_2!...a_m!}=\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}...\binom{n-a_1-...-a_{m-1}}{a_m}。$$

二、例题精讲

例 1.（第二类斯特林数）设$S(n,k)$为n元集分成k组的方法数，即将标有$1,2,...,n$的小球分为k组，不考虑不同组的次序的方法数。我们称它为第二类斯特林数。它满足下列递推

式：$S(n+1,r)=S(n,r-1)+rS(n,r)$，$S(n,1)=S(n,n)=1$。

例 2.（第一类斯特林数）对$1,2,...,n$的每个排列σ，称$(i,\sigma(i),\sigma^2(i),...),1\le i\le n$为$\sigma$中的一个圈，则$\sigma$能被划分称若干个互不相交的圈。设$F(n,r)$中是$1,2,...,n$的排列中恰有$r$个圈的排列的个数，称为第一类斯特林数。求证它满足递推式：

$F(n+1,r)=F(n,r-1)+nF(n,r)$，$F(n,1)=(n-1)!,F(n,n)=1$。

例 3. 画出凸n边形的所有对角线，假设没有三条对角线经过同一点，求凸n边形被分成多少块？这些对角线能围成多少个不同的三角形？

例 4. 设n是非负整数，求证：$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}=2^n$。

例 5. 设 $\varphi(n)$ 为 $1,2,\ldots,n$ 中与 n 互素的正整数的个数，试用容斥原理证明

$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{p_i})$，其中 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 是 n 的所有不同的质因子。

例 6. 设 n 是非负整数，试求出 $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]}\binom{n}{3k}$ 的值。

例 7. 假设有一只蚂蚁要从 $(0,0)$ 走到 (n,n)，它每一步只能从一个格点走到右边或上边相邻的格点。已知它的路线从不走到直线 $y=x$ 上方，求合法道路的条数。

例 8.（1）在圆周上有 $2n$ 个点，有多少种方法把一对点连接成弦后得到 n 条互不相交的弦？

（2）把凸 n 边形剖分成三角形有多少种方法？

例 9.（错排问题）考虑 $1,2,...,n$ 的所有 $n!$ 个排列，假设 σ 是其中一个排列，如果 $\sigma(i)=i, 1\le i\le n$ 就称 i 为 σ 的不动点。设 p_n 是没有不动点的排列的个数，试求 p_n 的表达式。

例 10. 长为 n 的字符串中的每个字符均为 $0,1,2$，问有多少个这样的字符串，使得任意相邻的两数只差至多为 1？

例 11. 在一个圆周上取 n 个点并作所有连接这 n 个点中任意两点的弦。假设没有三条弦交于一点，求圆盘被这些弦划分成多少块。

例 12. 设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足对任意正整数 n，都有 $\sum_{d|n} a_d = 2^n$。求证：$n \mid a_n$。

例 13. $\{1,2,...,n\}$ 有多少个子集中没有两个相邻的数？