

## 局部不等式

### 一、知识要点

1. 对于一个能写成若干项之和的不等式, 有时从整体考虑较难入手, 故不妨先从局部入手, 导出一些局部的不等式为整体服务。经典的例子有用伯努利不等式证明幂平均不等式, 和用指数函数的切线放缩证明加权的均值不等式。

2. 切线放缩: 在条件  $\sum_{i=1}^n x_i = C$  的约束下求  $F = \sum_{i=1}^n f(x_i)$  的最小值时, 假设猜出

$x_i (1 \leq i \leq n)$  都等于  $x_0$  时  $F$  取最小值,  $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $x = x_0$  处

的切线, 则可以尝试证明  $f(x) \geq g(x)$ 。伯努利不等式  $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x (\alpha > 1)$ , 指数函数

的切线放缩  $e^x \geq 1+x$ , 对数函数的切线放缩  $\ln x \leq x-1$  都是经典的例子。

3. 割线放缩: 问题背景同上, 假设猜出  $F$  取最小值时  $x_i (1 \leq i \leq n)$  的取值恰为两个不同的

实数  $a, b$ , 设  $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$  为  $f(x)$  的割线, 则可以尝试证明

$f(x) \geq g(x)$ 。例如  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 。

定理 1. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的一个邻域  $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), \epsilon > 0$  上可导, 且存在  $A \in \mathbb{R}$  使得

$f(x) \geq A(x - x_0) + f(x_0), x \in I$  恒成立, 则必有  $A = f'(x_0)$ 。

### 二、例题精讲

例 1. 设  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  且  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ 。求证:  $\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1$ 。

例 2. 设  $a, b, c \geq 0$  且  $a + b + c = 4$ , 求  $S = \frac{1}{a^2 - 6a + 16} + \frac{1}{b^2 - 6b + 16} + \frac{1}{c^2 - 6c + 16}$  的最大值, 并确定何时取最大值。

例 3. 求最大的常数  $k$ , 使得对任意正实数  $x, y, z$ , 都有

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

例 4. (2007, 西部数学奥林匹克) 设实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 3$ . 求证:

$$\frac{1}{5a^2 - 4a + 11} + \frac{1}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{1}{5c^2 - 4c + 11} \leq \frac{1}{4}.$$

局部不等式

例 5. 设  $x, y, z \geq 0$ , 且  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。求证:  $\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \geq 1$ 。

例 6. 设  $x, y, z \geq 0$ , 求证:  $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2$ 。

例 7. 设  $0 \leq a, b, c \leq 1$ , 求证:  $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ 。

例 8. 非负实数  $a, b, c$  满足  $a+b+c=3$ , 求证:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq ab+bc+ac$ 。

例 9. (2001, IMO) 已知正实数  $a, b, c$ , 求证:  $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$ 。

例 10. 设  $a, b, c > 0$ , 证明:  $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$ 。

例 11. (2009, 塞尔维亚) 设  $x, y, z$  为正实数, 且  $x+y+z=xy+yz+zx$ 。求证:

$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq 1$ , 并确定等号成立的条件。

局部不等式

例 12. 已知非负实数  $x, y, z$  满足  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求证:

$$\sqrt{(1-xy)(1-zx)} + \sqrt{(1-yz)(1-xy)} + \sqrt{(1-zx)(1-yz)} \geq 2.$$

例 13. 设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (-1, 1]$ , 约定  $a_{n+1} = a_1$ . 求证:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i^2}$ .

例 14. 实数  $x, y, z$  满足  $x + y + z = 1$ , 设  $F = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}$ . 求证: (1) 若  $x, y, z \leq \frac{4}{3}$ , 则  $F \leq \frac{27}{10}$ ; (2) 若  $x, y, z \geq 0$ , 则  $F \geq \frac{5}{2}$ .

局部不等式

例 15. 设  $n$  为正整数, 对任意实数  $a_i, b_i \in [1, 2] (1 \leq i \leq n)$ , 若  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ , 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2. \text{ 何时等号成立?}$$

例 16. 设  $n$  为正整数, 实数  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  满足  $|x_i| \leq 2, 1 \leq i \leq n$ , 且  $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$ . 求证:  $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{2}{3}n$ .

例 17. 有  $n$  个互异的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 0, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ . 求证: 存在互不相同的

$$a, b, c, d \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \text{ 使得 } a + b + c + nabc \geq \sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + b + d + nabd.$$