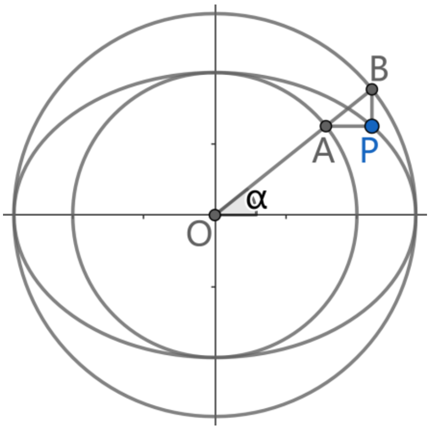
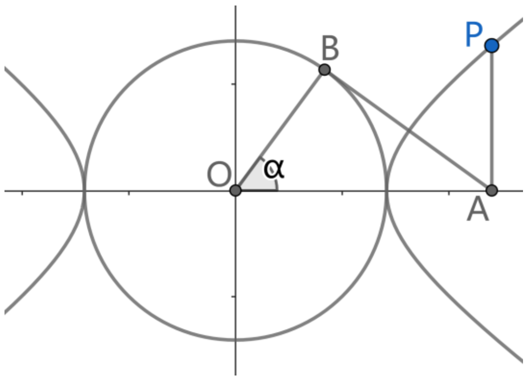
圆锥曲线的更多性质

一、知识要点

1.（1）椭圆的参数方程：设 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，则存在 $\alpha\in[0,2\pi)$，使得 $x_0=a\cos\alpha,\ y_0=b\sin\alpha$。这里的 α 称为椭圆上点 P 的离心角。

（2）双曲线的参数方程：设 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，则存在 $\alpha\in[0,2\pi)$，使得 $x_0=\dfrac{a}{\cos\alpha},\ y_0=b\tan\alpha$。这里的 α 称为双曲线上点 P 的离心角。若 $x_0>0$，则存在 $t\in\mathbb{R}$，使得 $x_0=\mathrm{ch}t=\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2},\ y_0=\mathrm{sh}t=\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$。

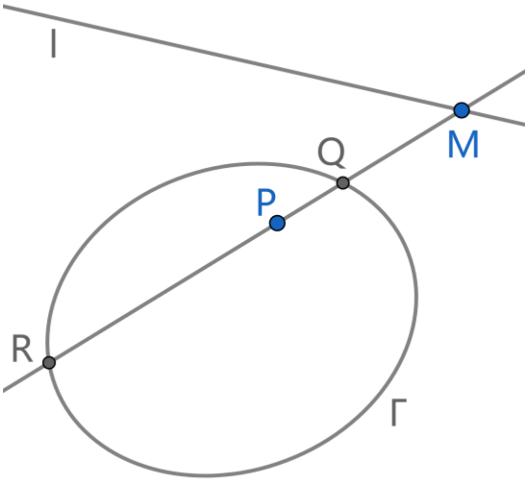


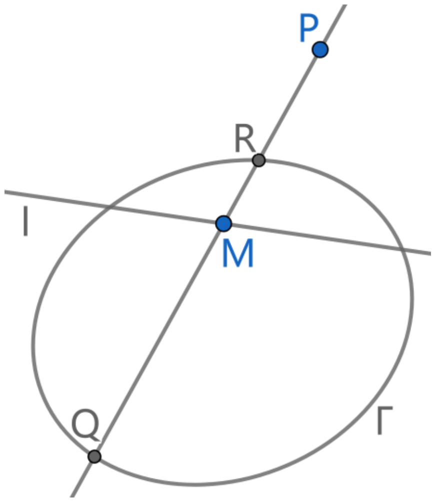


2.（1）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$A,B$ 是椭圆上关于原点对称的两个点。设 P 是椭圆上另一点，且直线 PA,PB 的斜率都存在。则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 为定值。

（2）设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$，$A,B$ 是双曲线上关于原点对称的两个点。设 P 是双曲线上另一点，且直线 PA,PB 的斜率都存在。则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}$ 为定值。

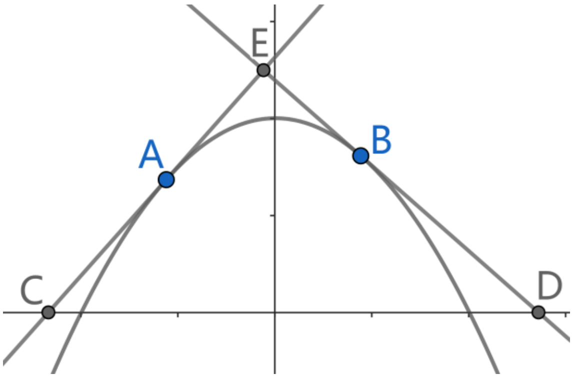
3. 设非退化二次曲线Γ的方程为$G(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，点$P(x_0,y_0)$不在曲线$\Gamma$上，且不是$\Gamma$的中心，过$P$的动直线与曲线$\Gamma$交于点$Q,R$，$M$是直线$QR$上的一点，使得$P,M;Q,R$成调和点列，即有向线段比$\dfrac{PQ}{PR}=-\dfrac{MQ}{MR}$。则$M$必在定直线$l$上，且$l$的方程为：$G^*(x,y)=Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$。我们称定直线$l$为点$P$关于曲线$\Gamma$的极线，点$P$称为直线$l$关于曲线$\Gamma$的极点。极点和极线有如下性质，称为配极原则：点$P$的极线通过点$M$等价于点$M$的极线通过点$P$。





二、例题精讲

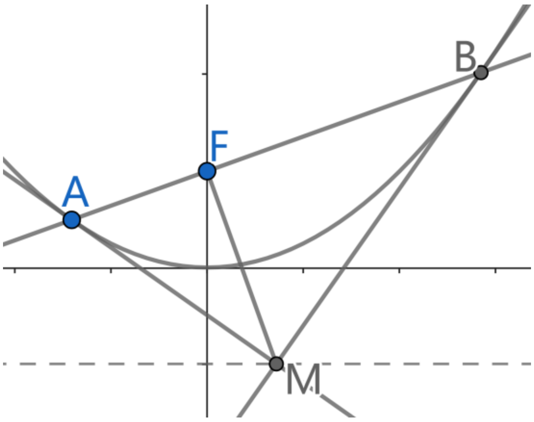
例 1. 已知A,B是$y=1-x^2$上在y轴两侧的点，求分别过A,B的两条切线与x轴围成的三角形面积的最小值。



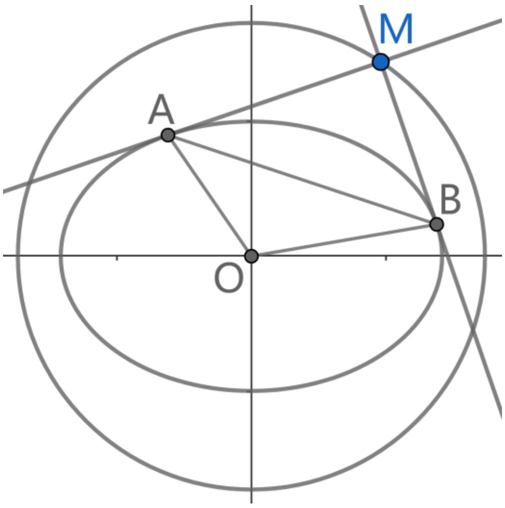
例 2. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，过焦点 F 且不平行于 x 轴的动直线 l 交抛物线于 A,B 两点。抛物线在 A,B 两点处的切线交于点 M 。求证：

（1）当直线 l 变化时，点 M 始终在一条定直线上；

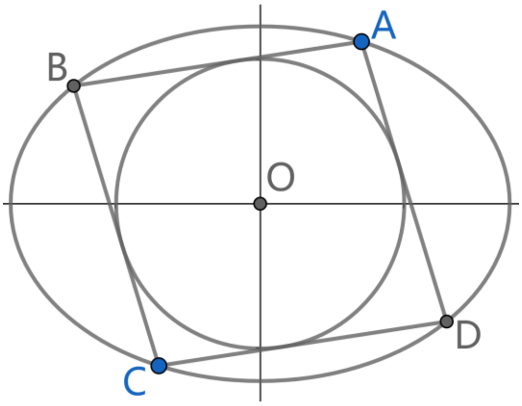
（2）A,M,B 三点的横坐标成等差数列；（3）$MA\perp MB, MF\perp AB$ 。



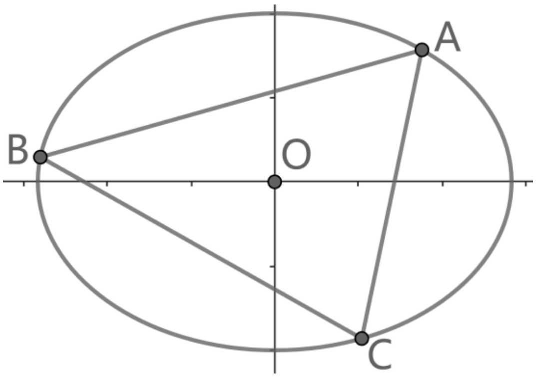
例 3. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，M 是圆 $x^2+y^2=3$ 上任一点，MA,MB 分别与椭圆 C 切于点 A,B。设 O 为坐标原点，求 $\triangle OAB$ 面积的取值范围。



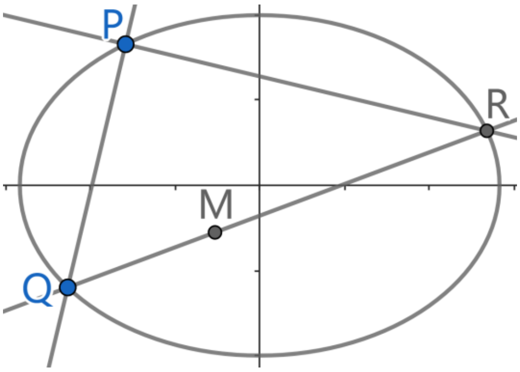
例 4. 已知$C_0: x^2+y^2=1$和$C_0: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$。试问：当且仅当$a,b$满足什么条件时，对$C_1$上任意一点$P$，均存在以$P$为顶点，与$C_0$外切，与$C_1$内接的平行四边形？



例 5.（1）设A,B,C是单位圆上的三个点，若$\triangle ABC$的重心是原点O，求证：$\triangle ABC$是正三角形。（2）设A,B,C是椭圆$\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上的三个点，若$\triangle ABC$的重心是原点$O$，求$\triangle ABC$的面积。

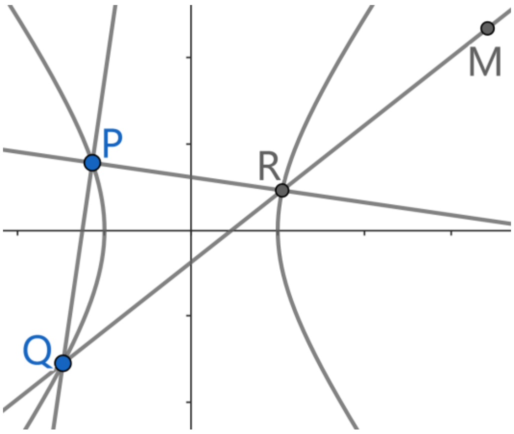


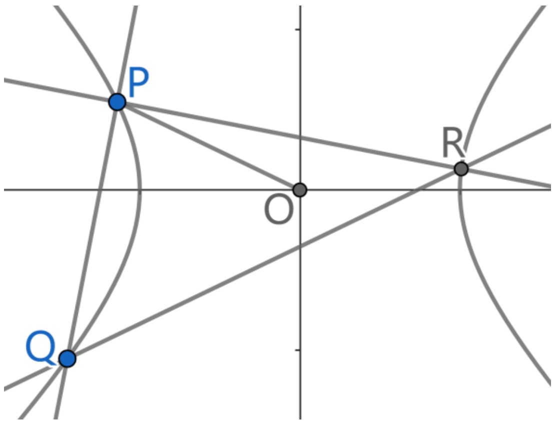
例 6. 设 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上的一点， PQ,PR 是椭圆的两条弦。求证： $PQ\perp PR$ 的充要条件是 QR 过定点 $M(\frac{c^2}{a^2+b^2}x_0,-\frac{c^2}{a^2+b^2}y_0)$。



例 7. 设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 上的一点， PQ,PR 是双曲线的两条弦。(1) 若 C 不是等轴双曲线，即 $a\neq b$，求证： $PQ\perp PR$ 的充要条件是 QR 过定点 $M(\frac{c^2}{a^2-b^2}x_0,-\frac{c^2}{a^2-b^2}y_0)$。

(2) 若 C 是等轴双曲线，即 $a=b$，求证： $PQ\perp PR$ 的充要条件是 $k_{QR}=-k_{OP}$。





例 8. 已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴、y轴，且过$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$两点。(1) 求E的方程；(2) 设过点$P(1,-2)$的直线交E于M,N两点，过M且平行于x轴的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$。求证：直线$NH$过定点。