三元对称不等式

一、知识要点

定义 1.（1）（n 元多项式）设 R 是一个交换环（R 可以取 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$），n 为正整数，$X_1,X_2,...,X_n$ 是 n 个不定元，它们彼此无关。称 $aX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$ $(a\in R)$ 为一个单项式，其中 a 是这个单项式的系数，k_j 为非负整数。$a\neq 0$ 时，称该单项式的次数为 $\deg f=k_1+k_2+...+k_n$，零多项式的次数没有定义。如果两个单项式除相差一个系数外，其余都相同，即每个 X_i 的次数都相同，则称这两个单项式为同类项。同类项可以相加：$aX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}+bX_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}=(a+b)X_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_n^{k_n}$。两个单项式可以相乘：$(aX_1^{i_1}X_2^{i_2}...X_n^{i_n})\cdot(bX_1^{j_1}X_2^{j_2}...X_n^{j_n})=abX_1^{i_1+j_1}X_2^{i_2+j_2}...X_n^{i_n+j_n}$。有限个单项式之和 $f(X_1,X_2,...,X_n)=\sum\limits_{i_1,i_2,...,i_n\geq 0}a_{i_1,i_2,...,i_n}X_1^{i_1}X_2^{i_2}...X_n^{i_n}$ 称为 R 上的一个 n 元多项式，并将所有 R 上的 n 元多项式的集合记作 $R[X_1,X_2,...,X_n]$。对一个 n 元多项式，它的系数非零的单项式的最大次数称为该多项式的次数。我们可以从单项式的加法、乘法出发，自然地定义 n 元多项式的加法、乘法。

（2）（三元多项式）x,y,z 是三个不定元，称表达式 $ax^iy^jz^k$ $(a\in R)$ 为一个单项式。有限个单项式之和 $f(x,y,z)=\sum\limits_{i,j,k\geq 0}a_{i,j,k}x^iy^jz^k$ 称为 R 上的一个三元多项式，并将所有 R 上的三元多项式的集合记作 $R[x,y,z]$。

定义 2.（1）设 $f(x,y,z)\in R[x,y,z]$，若 f 满足 $f(x,y,z)=f(x,z,y)=f(y,x,z)$ $=f(y,z,x)=f(z,x,y)=f(z,y,x)$，则称它是 R 上的三元对称多项式。

（2）若 f 满足 $f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$，则称它是 R 上的三元轮换多项式。

（3）设 $s=x+y+z,q=xy+yz+zx,p=xyz$，它们称为三元基本对称多项式。R 上的任意三元对称多项式 $f(x,y,z)$ 一定能写成 R 上 s,q,p 的多项式 $g(s,q,p)$。注意 $R=\mathbb{Z}$

时，$g(s,q,p)$ 的系数都在 $\mathbb{Z}$ 中。

定义 3.（1）（n 元对称多项式）设 R 是一个交换环，我们称一个多项式 $f(X_1,X_2,...,X_n)\in R[X_1,X_2,...,X_n]$ 是对称的，若对 $\{1,2,...,n\}$ 的任意排列 σ，都有 $f(X_1,X_2,...X_n)=f(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},...,X_{\sigma(n)})$。

（2）（n 元基本对称多项式）设 $k\ge 1$，关于 $X_1,X_2,...,X_n$ 的第 k 个基本对称多项式定义如下：$e_k=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k}$。$k>n$ 时我们有 $e_k=0$，有时还可以定义 $e_0=1$。

定理 1.（对称多项式基本定理）设 $f(X_1,X_2,...,X_n)\in R[X_1,X_2,...,X_n]$ 是一个 R 上的 n 元对称多项式，则存在唯一的多项式 $g(Y_1,Y_2,...,Y_n)\in R[Y_1,Y_2,...,Y_n]$，使得 $f(X_1,X_2,...,X_n)=g(e_1,e_2,...,e_n)$ 其中 $e_1,e_2,...,e_n$ 为关于 $X_1,X_2,...,X_n$ 的基本对称多项式，由定义 3（2）给出。可以对 n 用归纳法证明此定理。

性质 1. $x,y,z\ge 0$ 时，我们有：（1）$s^2\ge 3q$；（2）$q^2\ge 3ps$；（3）$s\ge 3p^{1/3}$；（4）$q\ge 3p^{2/3}$；（5）$sq\ge 9p$。上述不等式中，（1）（3）（5）的取等条件都是 $x=y=z$，（2）（4）的取等条件为 $x=y=z>0$ 或 x,y,z 中两个为 0。

定理 2.（舒尔不等式）（1）设 $x,y,z\ge 0$，r 为实数，则 $\sum x^r(x-y)(x-z)\ge 0$。$r<0$ 的情形需要先通分。特别地，$r=1$ 时我们有

$$\sum x^3-\sum x^2y-\sum xy^2+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\ge 0，即 s^3-4sq+9p\ge 0。$$

（2）一般地，设 $f(x)\ge 0\,(x\ge 0)$ 是 x 的单调函数，则 $\sum f(x)(x-y)(x-z)\ge 0$。

定理 3.（1）设 $x,y,z\in\mathbb{R}$，则 $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$

$=-27p^2+(18sq-4s^3)p+s^2q^2-4q^3\ge 0$。

（2）设 $x,y,z\in\mathbb{C}$，满足 $x+y+z,xy+yz+zx,xyz\in\mathbb{R}$ 且

$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\ge 0$，则 $x,y,z\in\mathbb{R}$。

（3）设 $x,y,z\in\mathbb{R}$，$s=x+y+z,q=xy+yz+zx$ 为定值，满足 $s^2\ge 3q$。不妨设 $x\le y\le z$，则 $p=xyz$ 的最大值一定在 $x=y\le z$ 时取到，p 的最小值一定在 $x\le y=z$ 时取到。具体来说，$s=1$ 时，设 $t=\sqrt{1-3q}\ge 0$，则 $\frac{1-3t^2-2t^3}{27}\le p\le\frac{1-3t^2+2t^3}{27}$，两侧等号都可以成立。

（4）设 $x,y,z\ge 0$，$s=x+y+z,q=xy+yz+zx$ 为定值，满足 $s\ge 0,s^2\ge 3q\ge 0$。不妨设 $x\le y\le z$，则 $p=xyz$ 的最大值一定在 $x=y\le z$ 时取到，p 的最小值一定在 $x\le y=z$，或 $x=0$ 时取到。具体来说，$s=1$ 时，设 $t=\sqrt{1-3q}\ge 0$，则

$\max\{0,\frac{1-3t^2-2t^3}{27}\}\le p\le\frac{1-3t^2+2t^3}{27}$，两侧等号都可以成立。

推论 1.（1）设 $f(x,y,z)$ 是实系数三元对称多项式，$\deg f\le 5$。则

$f(x,y,z)=g(s,q,p)=p\cdot g_1(s,q)+g_0(s,q)$，当 s,q 固定时它是 p 的一次函数，最值只能在 p 取最值时取到。(i) 若 $x,y,z\in\mathbb{R}$，则此时 x,y,z 中有两个相等。(ii) 若

$x,y,z\geq 0$，则此时 x,y,z 中有两个相等，或有一个为零。

（2）若 $f(x,y,z)=g(s,q,p)$ 且 $g(s,q,p)$ 中 p 的次数不超过 2，设

$g(s,q,p)=p^2\cdot g_2(s,q)+p\cdot g_1(s,q)+g_0(s,q)$。若 $g_2(s,q)\leq 0$ 恒成立，则对固定的 s,q，$g(s,q,p)$ 是关于 p 的开口向下的二次函数，只能在 p 取最值时取最小值。于是 f 只能在（1）中（i）（ii）两种情形下取最小值。

二、例题精讲

例 1.（1）$x^2+y^2+z^2=s^2-2q$；（2）$x^3+y^3+z^3=s(s^2-3q)+3p$；

（3）$\sum x^2(y+z)=sq-3p$；（4）$(x+y)(y+z)(z+x)=sq-p$；

（5）$x^4+y^4+z^4=(\sum x^2)^2-2(\sum x^2y^2)=(s^2-2q)^2-2(q^2-2sp)$

$=s^4-4s^2q+2q^2+4sp$；

（6）（$9-8$ 不等式）设 $x,y,z\geq 0$，则 $9(x+y)(y+z)(z+x)$

$\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

例 2. 设 $a,b,c\geq 0, a+b+c=3$，求 $a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{3}abc$ 的最小值。

例 3. 设 $x,y,z\geq 0, x+y+z=1$，求证：$7(xy+yz+zx)\leq 2+9xyz$。

例 4.（2014，高联 A 卷）设实数 a,b,c 满足 $abc>0, a+b+c=1$，求证：

$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}$。

例 5. 设 $a,b,c\geq 0$，$a+b+c=1$，求证：$\sum\frac{a}{1+bc}\geq\frac{9}{10}$。

例 6. 设 $x,y,z\geq 0, xy+yz+zx=1$，求证：$\sum x(1-y^2)(1-z^2)\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$。

例 7. 设$a,b,c\ge 0$，求证：$\sum\frac{b+c}{a}\ge 3+\frac{(\sum a^2)(\sum ab)}{abc(a+b+c)}$。

例 8. 设$a,b,c>0$，求证：$(1+\frac{4a}{b+c})(1+\frac{4b}{c+a})(1+\frac{4c}{a+b})>25$。并说明右边的常数$25$是最优的。

例 9. 设$a,b,c>0, abc=1$，求证：$\sum\frac{1}{a}-\frac{3}{\sum a}\ge 2(\sum\frac{1}{a^2})\frac{1}{\sum a^2}$。

例 10. 已知正实数 a,b,c 满足 $abc=1$。（1）求证：$f(r)=a^r+b^r+c^r\ (r>0)$ 是单调不减函数。（2）求证：$\frac{1}{1+a+b^3}+\frac{1}{1+b+c^3}+\frac{1}{1+c+a^3}\le 1$。

例 11. 设 $A,B,C\ge 0,\ A+B+C=\pi$，求证：

$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。

例 12. 设 $a,b,c\ge 0,\ a+b+c=3$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a+abc\le 4$。何时等号成立？

例 13. 已知 $a,b,c\geq 0, a+b+c=1$，求证：$2\leq\sum(1-a^2)^2\leq(1+a)(1+b)(1+c)$。

例 14. 设 $a,b,c\geq 0$，求证：$2\sqrt{\sum ab}\leq\sqrt{3}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$。

三、拓展阅读

1.（Vasc 不等式）对任意实数 a,b,c，有 $(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$。等号成立当且仅当 $a=b=c$，或 $a:b:c=\sin^2\frac{4\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}$ 及其轮换。事实上，我们有

$$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2$$

$$+(b^2-2bc+ca-a^2+ab)^2+(c^2-2ca+ab-b^2+bc)^2]\geq 0$$。也可以设

$x=a^2+b(c-a), y=b^2+c(a-b), z=c^2+a(b-c)$，则 $x+y+z=a^2+b^2+c^2$，

$xy+yz+zx=\sum[a^2b^2+a^2c(a-b)+b^3(c-a)+bc(c-a)(a-b)]=\sum a^3b$。由

$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ 知原不等式成立。