调整法-1

一、知识要点

引理 1. 设 $f(x)$ 为区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的下凸函数，则对任意 $x,y\in I,x<y,t\in(0,\frac{y-x}{2}]$，都有 $f(x+t)+f(y-t)\le f(x)+f(y)$。

定理 1.（半凹半凸定理）设 n 个实数 $x_1,x_2,...,x_n$ 满足：（1） $x_1\le x_2\le...\le x_n$；（2） $x_1+x_2+...+x_n=C$， C 为常数。f 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，如果 f 在 $(-\infty,c]$ 上是上凸的，在 $[c,+\infty)$ 上是下凸的，设 $F=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$，则 F 在 $x_2=x_3=...=x_n\ge c$ 时取极小值，在 $x_1=x_2=...=x_{n-1}\le c$ 时取极大值。

定理 2.（有界闭区间上的半凹半凸定理）设 n 个实数 $x_1,x_2,...,x_n$ 满足：（1） $x_1\le x_2\le...\le x_n$；（2） $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$；（3） $x_1+x_2+...+x_n=C$， C 为常数。f 是一个定义在 $[a,b]$ 上的函数，如果 f 在 $[a,c]$ 上是上凸的，在 $[c,b]$ 上是下凸的，设 $F=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$，则存在 $k,l\in\{1,2,...,n\}$，使得 F 在 $x_1=x_2=...=x_{k-1}=a,x_{k+1}=...=x_n$ 时取极小值，在 $x_1=x_2=...=x_{l-1},x_{l+1}=...=x_n=b$ 时取极大值。

定理 3.（Popoviciu 不等式）设 f 是从区间 $I\subset\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的下凸函数，则对任意 $x,y,z\in I$，都有 $\frac{1}{3}[f(x)+f(y)+f(z)]+f(\frac{x+y+z}{3})$ $\ge\frac{2}{3}[f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{y+z}{2})+f(\frac{z+x}{2})]$。[作为结论，我们有 $x,y,z>0$ 时，$\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+\frac{3}{x+y+z}\ge\frac{4}{3}(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x})$。]

二、例题精讲

例 1. 若$x,y,z\ge 0$且$x+y+z=1$，求证：$xy+yz+zx\le 2xyz+\frac{7}{27}$。

例 2. 若$a,b,c,d>0$且$abcd=1$，求证：（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{4}{a+b+c+d}\ge 5$；

（2）（2011，女子数学奥林匹克）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge \frac{25}{4}$；

（3）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{12}{a+b+c+d}\ge 7$。

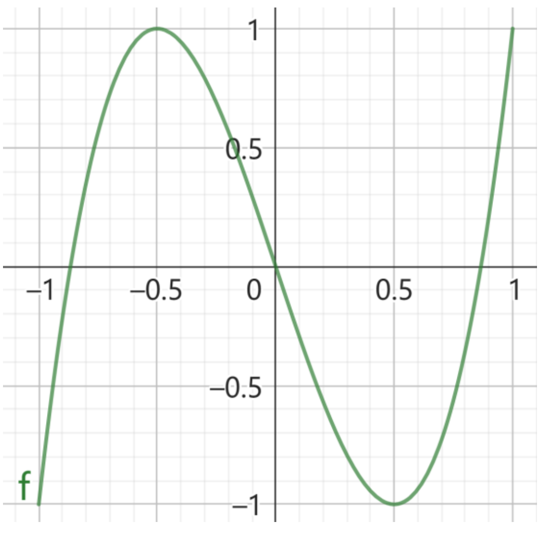
例 3. 已知$x,y,z>0$，求函数$f(x,y,z)=\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}$的最大值。

例 4. 设n为正整数，$x_1,x_2,...,x_n$为非负实数，且$x_1+x_2+...+x_n=\pi$。记M_n为$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+...+\sin^2 x_n$的最大值。（1）求$M_2$和$M_3$；（2）证明：当$n>3$时，$M_n$

为定值。

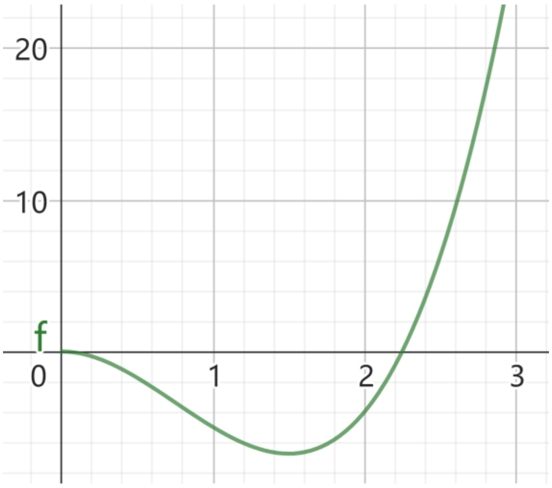
例 5. 设 $A=(a_1,a_2,...,a_{2001})$ 是一个正整数排列，称三元有序数组 (a_i,a_j,a_k) 是“好数组”，如果满足 $1\le i<j<k\le 2001$ 且 $a_j=a_i+1, a_k=a_j+1$。在所有的排列 A 中，试求“好数组”的最大个数。

例 6. 设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是 n 个实数，且满足 $\sum_{i=1}^{n}\cos(x_i)=0$。在 $n=9,10$ 时，分别求 $F=\sum_{i=1}^{n}\cos(3x_i)$ 的最大可能值。（附 $f(x)=4x^3-3x$ 的图像。）



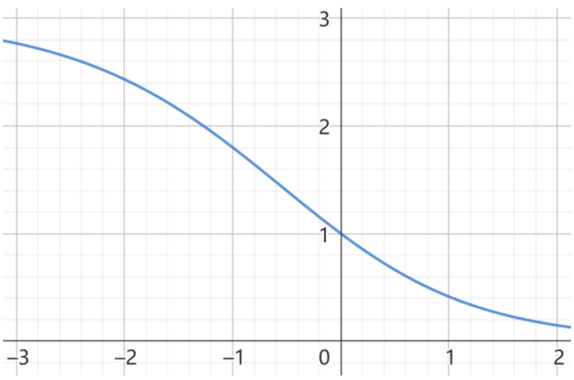
例 7. 设 $a_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$。求证：$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^3 + n^2 \geq (2n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2$。

（附 $f(x) = 4x^3 - 9x^2$ 的图像。）



例 8. 正整数 $n \geq 3$，考虑正实数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 满足 $a_1 a_2 ... a_n = 1$，求证：$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + 3}{(a_k + 1)^2} \geq 3$。

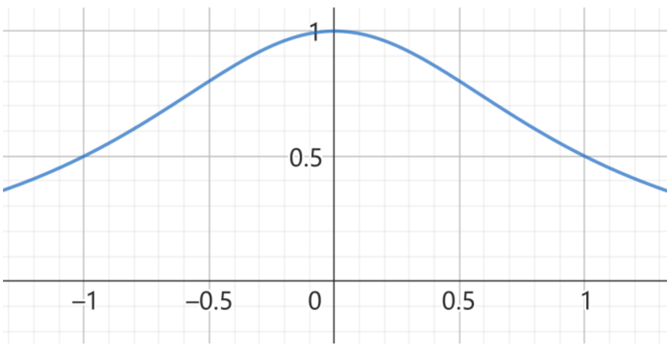
（附 $f(x) = \frac{e^x + 3}{(e^x + 1)^2}$ 的图像。）



例 9. 设正整数$n\geq 4$，$x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n, x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geq n^2$，求证：$\max_{1\leq i\leq n} x_i\geq 2$。

例 10. 正整数$n\geq 2$，正实数$x_1<x_2<\ldots<x_n, y_1<y_2<\ldots<y_n$。求证：对任意$C\in(-2,2)$，有$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_i+y_i^2}<\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+Cx_iy_{i+1}+y_{i+1}^2}$，其中$y_{n+1}=y_1$。

例 11. 实数x,y,z满足$x+y+z=1$，求证：$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\leq\frac{27}{10}$。(附$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$的图像。)



例 12. 设 $0 \le a,b,c \le 1$， $f(a,b,c)=\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}$

$+(1-a)(1-b)(1-c)$，求证： $f(a,b,c)$ 的最大值为 1，最小值为 $\frac{7}{8}$ 。

例 13. 给定正整数 $n \ge 2$， $x_i > 0\ (1 \le i \le n)$ 满足对任意 $i \ne j$，都有 $x_i x_j \ge 1$。求证：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$ 。

例 14. 非负实数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=1$，求证：

$abc+bcd+cda+dab \le \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$ 。何时等号成立？