

调和四边形

调和四边形

定义 1. 对边长度的乘积相等的圆内接四边形，称为调和四边形。

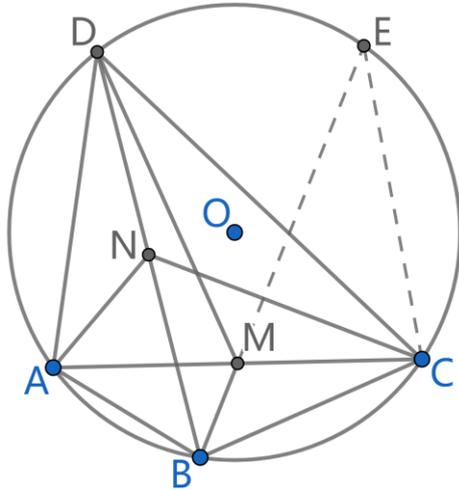
性质 1. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形， M 为 AC 中点， N 为 BD 中点，则

$$\triangle ANB \sim \triangle ADC \sim \triangle BNC, \quad \triangle AND \sim \triangle ABC \sim \triangle DNC, \quad \triangle AMB \sim \triangle DCB \sim \triangle DMA, \\ \triangle CMB \sim \triangle DAB \sim \triangle DMC。$$

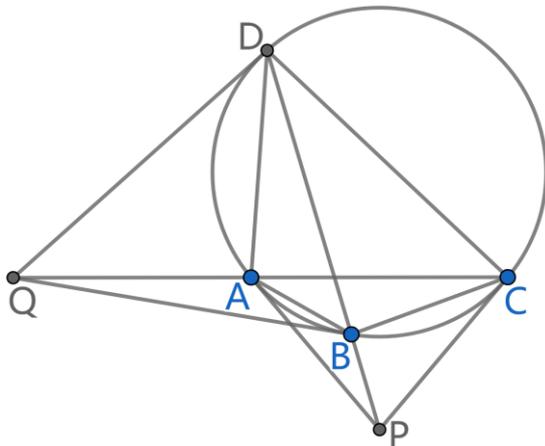
例 1. (2011, 高联 A 卷) 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， M, N 分别为 AC, BD 的中点。若

$\angle BMC = \angle DMC$ ，求证： $\angle AND = \angle CND$ 。

性质 2. 设 P 为圆 ω 外一点， PA, PC 是 ω 的两条切线，切点分别为 A, C ，过 P 的一条 ω 的割线交 ω 于 B, D 两点，则四边形 $ABCD$ 为调和四边形。

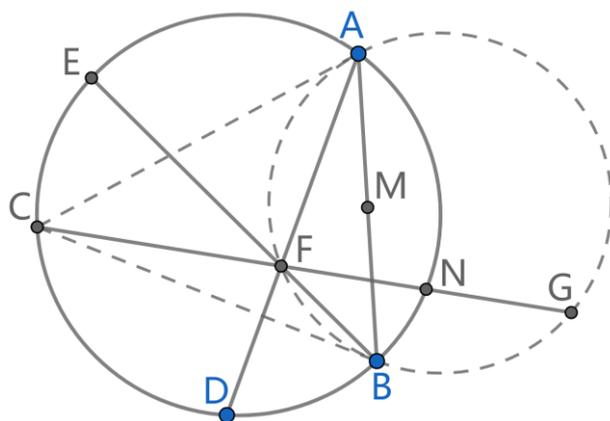


性质 3. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形，过 A, C 分别作 ω 的切线交于点 P ，则 P, B, D 三点共线。同理，过 B, D 分别作 ω 的切线交于点 Q ，则 Q, A, C 三点共线。



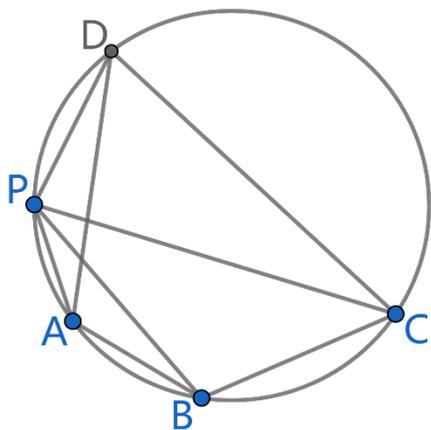
调和四边形

例 2. (2024, 高联预赛广东) AB 为圆 O 的一条弦 ($AB < \sqrt{3}R$, R 为圆 O 的半径), C 为优弧 AB 的中点, M 为弦 AB 的中点, 点 D, E, N 分别在 BC, CA 和劣弧 AB 上, 满足 $BD = CE$, 且 AD, BE, CN 三线共点于 F 。延长 CN 至 G , 使 $GN = FN$ 。求证:
 $\angle FMB = \angle GMB$ 。



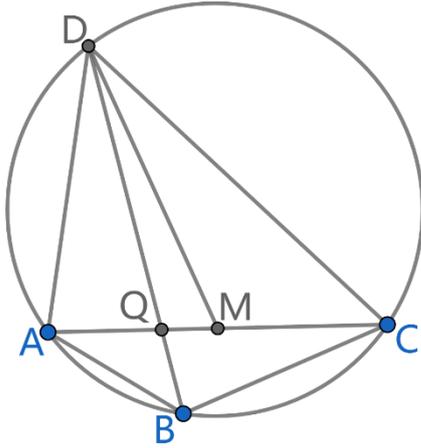
性质 4. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形, P 为 ω 上任意一点, 则

$$PA, PC; PB, PD \text{ 为调和线束, 即 } \frac{\sin \angle APB}{\sin \angle CPB} = \frac{\sin \angle APD}{\sin \angle CPD}.$$



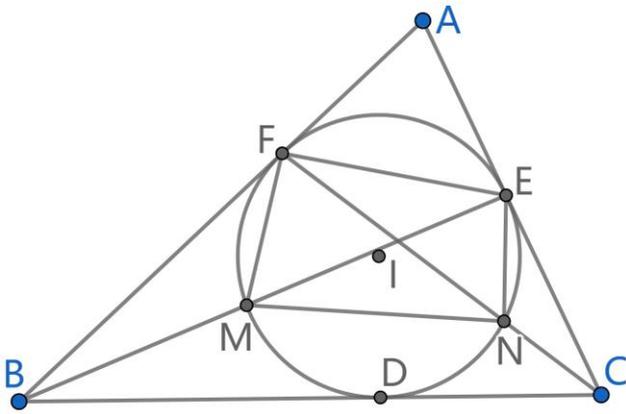
定义 2. 三角形中线的等角线称为三角形的陪位中线。

性质 5. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形, 对角线 AC, BD 交于点 Q , 则 DQ 为 $\triangle ACD$ 的陪位中线, BQ 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线, CQ 为 $\triangle BCD$ 的陪位中线, AQ 为 $\triangle ABD$ 的陪位中线。



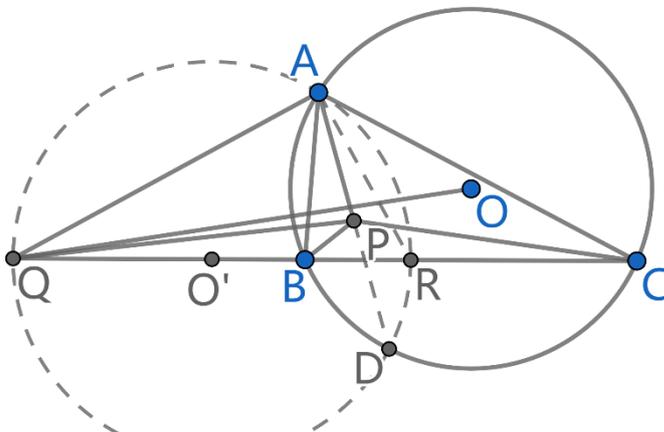
例 3. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 分别与边 CA, AB 切于点 E, F , BE, CF 分别与 $\odot I$ 交于点 M, N 。

求证: $MN \cdot EF = 3MF \cdot NE$ 。

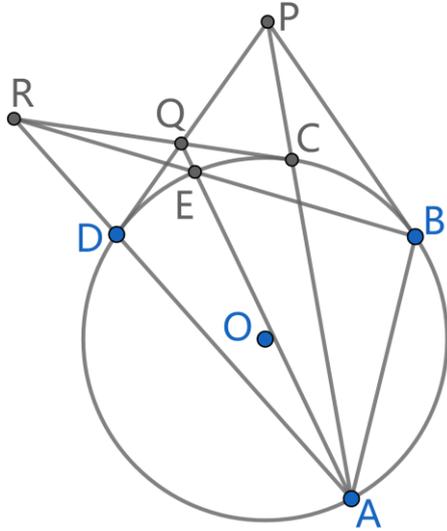


例 4. O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心, $AB < AC$, Q 为 $\angle BAC$ 的外角平分线与 BC 的交点, 点 P

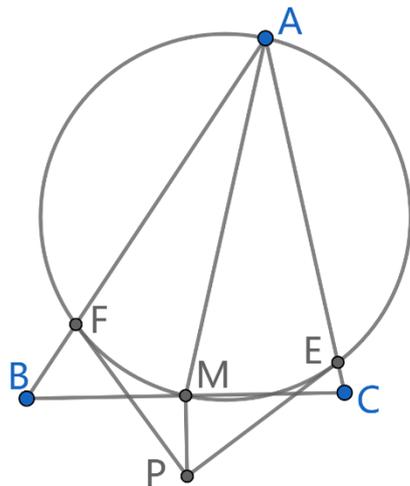
在 $\triangle ABC$ 的内部, $\triangle BPA \sim \triangle APC$ 。求证: $\angle QPA + \angle OQB = \frac{\pi}{2}$ 。



例 5. (2013, 亚太数学奥林匹克) PB, PD 为 $\odot O$ 的切线, PCA 为 $\odot O$ 的割线, C 关于 $\odot O$ 的切线分别与 PD, AD 交于点 Q, R 。 AQ 与 $\odot O$ 的另一个交点为 E 。 求证: B, E, R 三点共线。

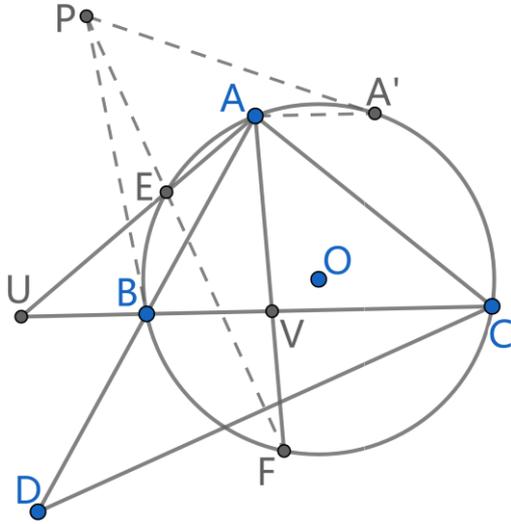


例 6. 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 的中点, 以 AM 为直径的圆分别与 AC, AB 交于点 E, F , 过点 E, F 作以 AM 为直径的圆的切线, 交点为 P 。 求证: $PM \perp BC$ 。

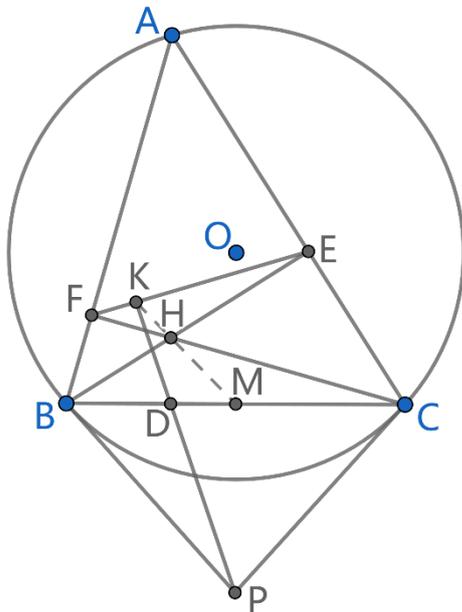


调和四边形

例 7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, A 关于点 B 的对称点为 D , CD 的中垂线与 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 交于点 E, F , AE, AF 分别与 BC 交于点 U, V 。求证: B 为 UV 中点。

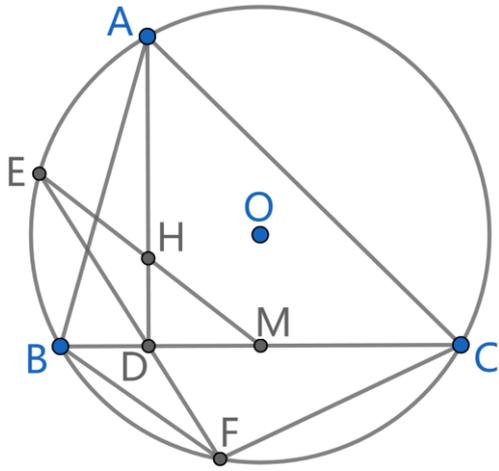


例 8. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 三条高线 AD, BE, CF 交于 H , 过点 B, C 作 $\odot O$ 的切线交于点 P , PD 与 EF 交于点 K , M 为 BC 的中点。求证: K, H, M 三点共线。



调和四边形

例 9. (2012, 亚太数学奥林匹克) 已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, H 为垂心, AH 与 BC 交于点 D , M 为边 BC 的中点, 延长 MH , 与 $\odot O$ 交于点 E , 延长 ED , 与 $\odot O$ 交于点 F 。
 求证: 四边形 $ABFC$ 为调和四边形。



例 10. (2011, 哈萨克斯坦) 已知钝角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle C > \frac{\pi}{2}$, C' 为 C 关于 AB 的对称点, AC' 与 $\odot O$ 交于点 E , BC' 与 $\odot O$ 交于点 F , M 为 AB 的中点, MC' 与 $\odot O$ 交于点 N (点 C' 在 M 与 N 之间), K 为 EF 的中点。求证: AB, CN, KC' 三线共点。

