图论入门

前言：大数学家欧拉于 1736 年写文章讨论了著名的柯尼斯堡七桥问题，这被后人认为是数学史上有关图论的第一篇文章。在今天这个信息时代，几乎可以想到的各个学科中都问题都可以运用图模型求解。例如，生态环境中不同物种的竞争，社会组织中个体间的影响关系，体育中单循环赛的结果，科研人员之间的合作关系，网站之间的链接，输入法中根据词频联想下一个字或词，机器人如何在迷宫中规划到出口的最短路径等等，都可以用图进行建模。

一、知识要点

定义 1.（1）一个图 G 由两类对象构成：它有一个被称为顶点的非空有限集 V，和一个被称为边的有限集 E，每条边是一个顶点对，它们称为这条边的端点，这条边连接它的端点。我们用 $G=(V,E)$ 来表示顶点集为 V，边集为 E 的图。

（2）若一条边把一个顶点连接到它自身，就称这条边为环。

（3）若有多条边连接同一对顶点，就称这些边为多重边。

（4）每条边都连接两个不同顶点，且没有两条不同的边连接同一对顶点的图称为简单图。也就是说，没有环或多重边的图叫简单图。

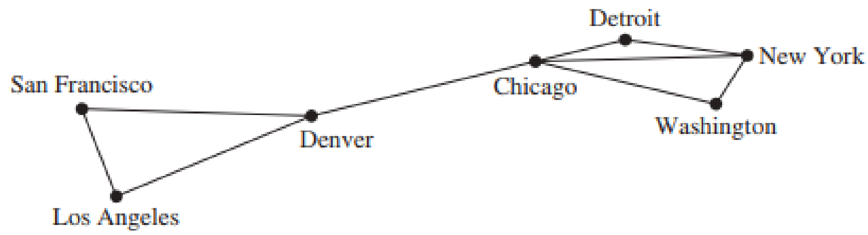

FIGURE 1 **A computer network.**

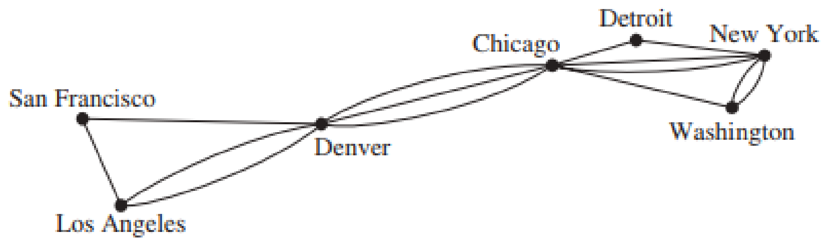

FIGURE 2 **A computer network with multiple links between data centers.**

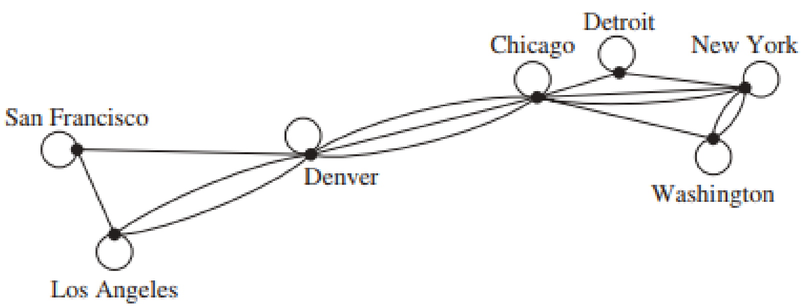

FIGURE 3 **A computer network with diagnostic links.**

上述定义中，每条边是一个无序对，它们没有方向，因此我们称这样的图为无向图。

定义 2.（1）一个有向图 $G=(V,E)$ 由一个非空顶点集 V 和一个有向边集 E 组成。每条有向边与一个有序顶点对相关联。与有序顶点对 (u,v) 相关联的有向边开始于 u，结束于 v。

（2）有向图中，起点与终点相同的边称为环；同时开始于 u，结束于 v 的多条边称为多重有向边。

（3）若一个有向图不包含环和多重有向边，就称它为简单有向图。

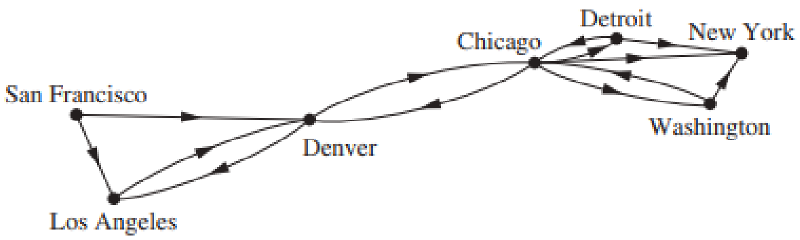

FIGURE 4 **A communications network with one-way communications links.**

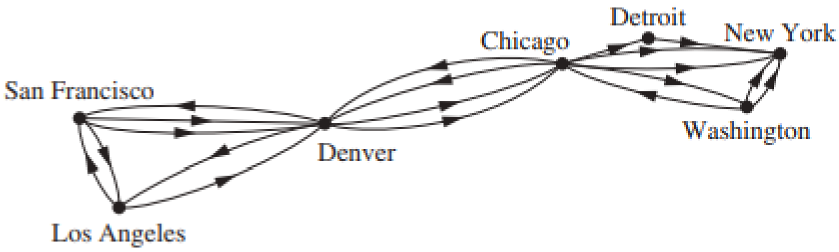

FIGURE 5 **A computer network with multiple one-way links.**

定义 3.（1）若 u,v 是无向图 $G=(V,E)$ 中一条边 e 的端点，则称两个顶点 u,v 在 G 里相邻。称边 e 关联顶点 u,v，或边 e 连接 u,v。

（2）无向图 G 中，顶点 v 的所有相邻顶点的集合记作 $N(v)$，称为 v 的邻居。

（3）无向图 G 中，顶点 v 的度是与 v 相关联的边的数目。v 到自身的环对 v 的度贡献为 2。v 的度记为 $\deg(v)$。

定义 4.（1）设 $G=(V,E)$ 为有向图，(u,v) 是 G 的一条有向边，则称 u 是这条边的起点，v 是这条边的终点。

（2）在有向图 G 中，顶点 v 的入度是以 v 为终点的边数，记作 $\deg^{-}(v)$。顶点 v 的出度是

以 v 为起点的边数，记作 $\deg^{+}(v)$ 。

定理 1.（1）设 $G=(V,E)$ 是有 m 条边的无向图，则 $2m=\sum_{v\in V}\deg(v)$ 。

（2）无向图有偶数个度为奇数的顶点。

（3）设 $G=(V,E)$ 是有 m 条边的有向图，则 $\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=m$ 。

定义 5. 若把简单图 $G=(V,E)$ 的顶点集分成两个不相交的非空集合 V_1,V_2，使得图中每一条边都连接 V_1 中的一个顶点和 V_2 中的一个顶点（也就是说，没有边连接 V_1 中的两个顶点或 V_2 中的两个顶点），则称 G 是二分图。

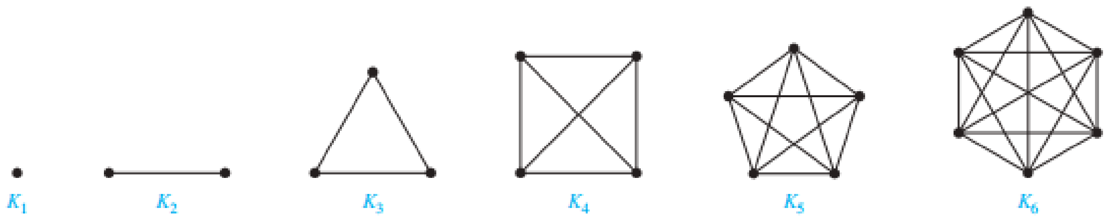

FIGURE 3 **The graphs K_n for $1 \le n \le 6$.**

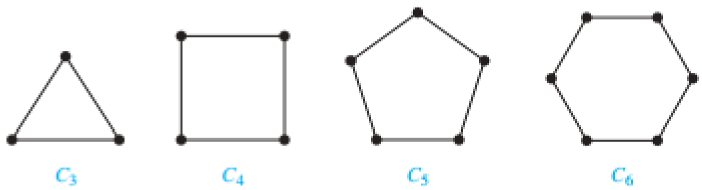

FIGURE 4 **The cycles C_3, C_4, C_5, and C_6.**

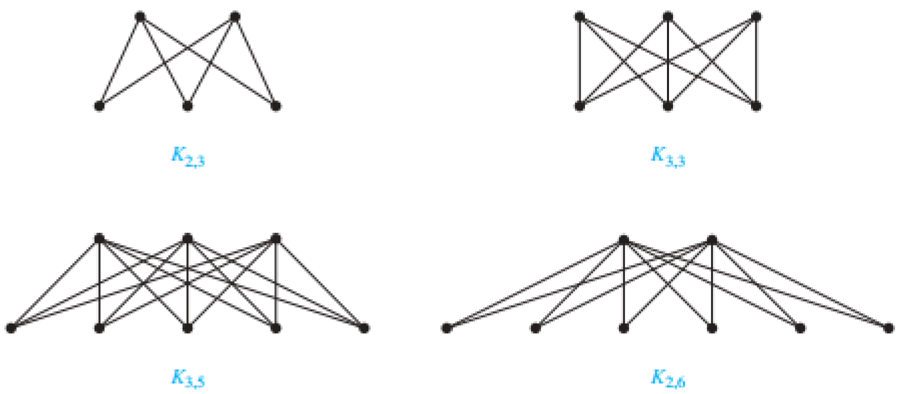

FIGURE 9 **Some complete bipartite graphs.**

我们在这里列举一些常见的简单图的例子：（1）设有 n 个顶点，在每对不同顶点之间连一条边就构成了 n 个顶点的完全图，记作 K_n 。

（2）设 $n \geq 3$，有 n 个顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，连接 n 条边 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ 就构成了 n 个顶点的圈图，记作 C_n 。

（3）设顶点集被划分为大小为 m, n 的两个子集，即 $V = V_1 \sqcup V_2, |V_1| = m, |V_2| = n$，对 V_1, V_2 间的每对顶点 $(v_1, v_2), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ 连一条边，就构成了完全二分图 $K_{m,n}$ 。

定义 6.（1）设 $n \geq 0$ 且 G 是无向图，在 G 中从 u 到 v 的一条长度为 n 的路径是 G 中 n 条边 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 的序列，其中存在顶点序列 $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$，满足 $x_0 = u, x_n = v$，且对任意的 $1 \leq i \leq n$，e_i 的两端点都是 x_{i-1}, x_i 。当 G 为简单图时，就用顶点序列 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 表示这条路径，此时路径由这个顶点序列唯一确定。

（2）若一条路径的起点和终点相同（即 $x_0 = x_n$），且 $n \geq 1$，则称它是一条回路。

（3）若一条路径或回路不重复地包含相同的边，则称它是简单的。

（4）若无向图中每一对不同顶点之间都有路径，则称该图为连通的，否则称它为不连通的。左下是连通图和不连通图的两个例子。

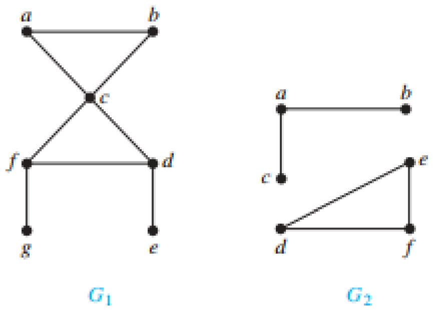

FIGURE 2 **The graphs G_1 and G_2.**

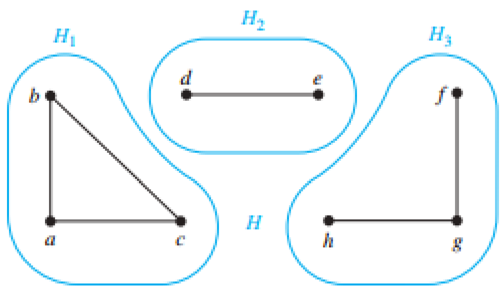

FIGURE 3 **The graph H and its connected components H_1, H_2, and H_3.**

（5）图 G 的一个连通分支是 G 的连通子图，且该子图不是 G 的另一个连通子图的真子图。也就是说，图 G 的连通分支是 G 的一个极大连通子图。G 是它的所有连通分支的不交并。右上是将一个图划分成三个连通分支的例子。

注：图 $G = (V, E)$ 的子图是图 $G_1 = (V_1, E_1)$，其中 $V_1 \subset V, E_1 \subset E$ 。若 $G_1 \neq G$，则称 G_1 是 G 的真子图。

定理 2. 简单图 G 是二分图，当且仅当 G 中没有奇数条边组成的回路。

能否从一个顶点出发沿着图的边前进，恰好经过图的每条边一次，并且回到这个顶点？这被称为欧拉回路问题。类似地，能否从一个顶点出发沿着图的边前进，恰好经过图的每个顶点一次并且回到这个顶点？这被称为哈密顿回路问题。

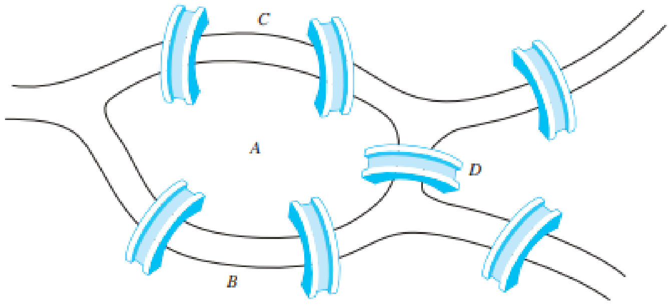

FIGURE 1 **The seven bridges of Königsberg.**

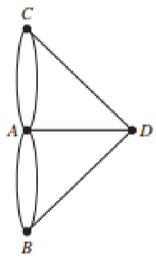

FIGURE 2 **Multigraph model of the town of Königsberg.**

定义 7. 图 G 的一条欧拉回路是包含 G 的每一条边的简单回路，图 G 的一条欧拉路径是包含 G 的每一条边的简单路径。

定理 3.（1）含有至少两个顶点的连通图（可以有环和多重边）具有欧拉回路，当且仅当它的每个顶点的度都为偶数。
（2）条件同上，连通图有欧拉路径但没有欧拉回路当且仅当它恰有两个度为奇数的顶点。

二、例题精讲

例 1. 求证：在简单图中若顶点数不小于 2，则至少有两个顶点有相同的度。

例 2.（托兰定理）设简单图G有n个顶点，m条边。求证：（1）若G不含有三角形，则$m\le[\frac{n^2}{4}]$。并对任意正整数n，给出等号成立的构造。

（2）若G不含有四面体（四个顶点的完全图），则$m\le[\frac{n^2}{3}]$。并对任意正整数n，给出等号成立的构造。

例 3. 设简单图G有8个顶点，12条边。求证：G中必有四边形（即存在四个顶点v_1,v_2,v_3,v_4，使得$(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4)$都是边）。

例 4. 设简单图G有n个顶点，m条边。求证：若$m>\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$，则$G$中必有四边形。

例 5. n支球队参加单循环赛（即每两支球队比赛一次，其中一队获胜另一队获负，没有平局）。设赛事结束后第$i\ (1\le i\le n)$队胜x_i场，负y_i场。求证：$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2$。

例 6. 求证：在任意n个人中，总存在两个人，使得剩下$n-2$个人中至少有$[\frac{n}{2}]-1$个人，他们每个人要么与这两人都认识，要么与这两人都不认识。

例 7.（马尔可夫链的例子）一个机器人初始时在一个 5x5 的正方形网格正中央，每经过 1 秒，它都会从当前的位置以相等的概率移动到相邻 8 个格子中的任意一个。当它走到最外圈的 16 个格子中的任何一个时，它才停止运动。那么这个机器人最终恰好停在四条边正中间的方格之一的概率是多少？

例 8. 有三所中学，每所有n名学生，每名学生都认识其它两所中学的$n+1$名学生。求证：可以从每所中学中各选一名学生，这三名选出的学生互相认识。

例 9. 简单图G有n个顶点，且边数大于$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$。求证：G为连通图。

例 10. 某次会议有n名代表出席，已知任意四名代表中都有一个人与其余三人握过手，求证：任意四名代表中必有一人与其余$n-1$名代表都握过手。

例 11. 将完全图K_{2017}的每条边赋值为$1,2,3$，使得每个三角形的三条边赋值之和≥ 5。求所有边赋值平均值的最小值。