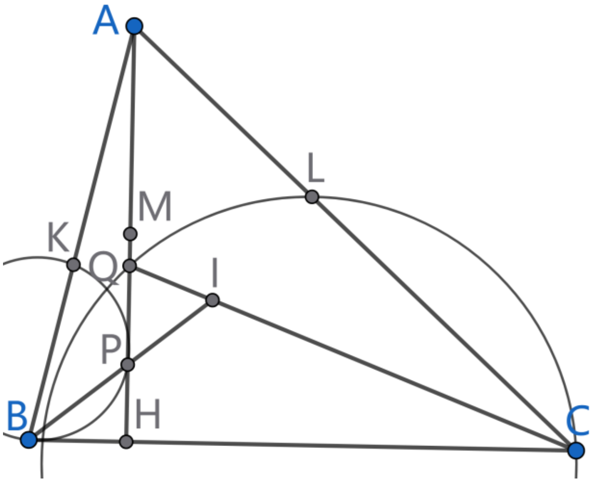
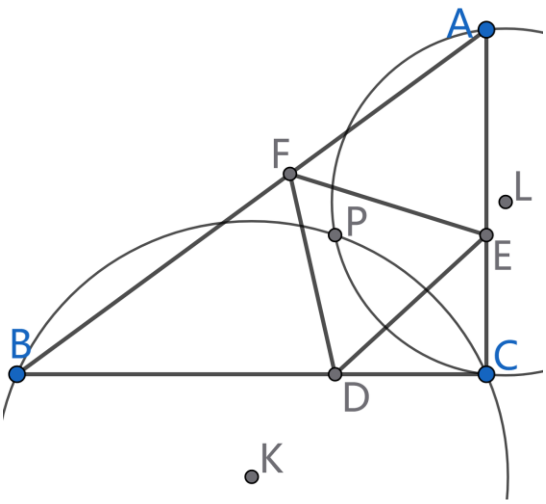
高联预赛真题选讲

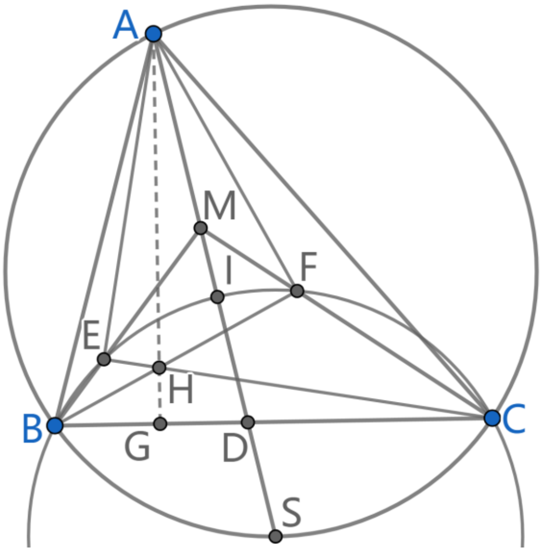
例 1.（2023，北京）$\triangle ABC$ 为给定的锐角三角形，其内切圆 ω 分别与边 AB, AC 切于点 K, L。高 AH 分别与 $\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线交于点 P, Q。设 ω_1, ω_2 分别为 $\triangle KPB, \triangle LQC$ 的外接圆，AH 中点 M 在 ω_1, ω_2 外。求证：从 M 引向 ω_1, ω_2 的切线长相等。



例 2.（2023，上海）给定直角 $\triangle ABC$，其中 $C=\dfrac{\pi}{2}, BC=a, CA=b$。点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上，使得 $\triangle DEF$ 是正三角形。求 $\triangle DEF$ 面积的最小值。



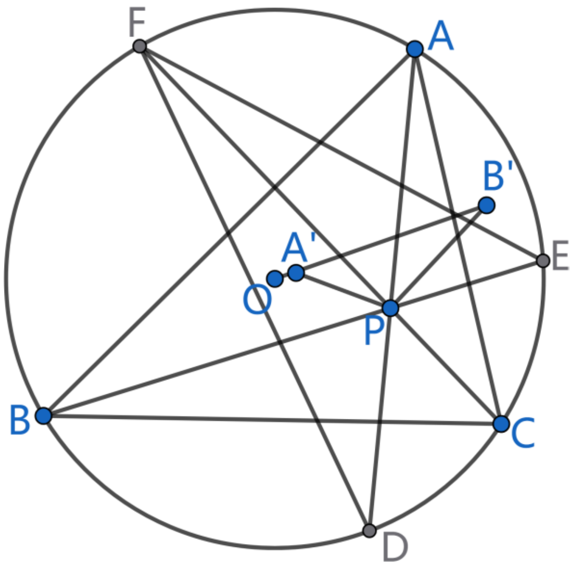
例 3.（2023，贵州）在$\triangle ABC$中，AI交BC于点D，AD中点为M，MB,MC与$\triangle BIC$外接圆的第二个交点分别是E,F。求证：（1）$AE\perp EC, AF\perp FB$；（2）若BF交CE于点H，则$AH\perp BC$。



例 4.（2023，东莞）已知正数$a.b.c.d$满足$a+b+c+d=1$，求
$M=\sqrt{a^2+\frac{1}{8a}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{8b}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{8c}}+\sqrt{d^2+\frac{1}{8d}}$的最小值。

例 5.（2023，东莞）已知$a_n=\frac{1}{n}$，以$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$为边长的正方形能互不重叠地全部放入一个边长为$a$的正方形内，求$a$的最小值。

例 6.（2023，福建）$\triangle ABC$ 外接圆为 $\odot O$， P 是 $\triangle ABC$ 内部一点。延长 AP 交 $\odot O$ 于点 D，延长 BP 交 $\odot O$ 于点 E，延长 CP 交 $\odot O$ 于点 F。设点 A 关于直线 EF 的对称点为 A_1，点 B 关于直线 DF 的对称点为 B_1。求证：$\triangle PAB \backsim \triangle PA_1B_1$。



例 7.（2023，福建）设有序数组 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{10})$ 同时满足以下 4 个条件：

（1）$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是 $1,2,\cdots,10$ 的一个排列；

（2）$a_1<a_2,a_3<a_4,a_5<a_6,a_7<a_8,a_9<a_{10}$；

（3）$a_2>a_3,a_4>a_5,a_6>a_7,a_8>a_9$；

（4）不存在 $1\le i<j<k\le 10$，使得 $a_i<a_k<a_j$。

求这样的有序数组 A 的个数。

例 8.（2023，上海）设集合 $M=\{1,2,...,2023\}$，对 M 的子集 $A=\{a_1,\cdots,a_k\}$，令它对应一个数 $\alpha(A)=(-1)^{a_1+\cdots+a_k}$（空集 $\varnothing$ 对应的数 $\alpha(\varnothing)=(-1)^0=1$）。对 M 的所有子集 A，求它们对应的数的总和 $\sum\limits_{A\subset M}\alpha(A)$。

例 9.（2023，四川）给定正整数 $a\le b$，数列 $\{f_n\}$ 满足:

$f_1=a, f_2=b, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, (n=1,2,...)$。若对任意的正整数 n，都有

$(\sum\limits_{k=1}^{n}f_k)^2\le\lambda\cdot f_nf_{n+1}$，求实数 λ 的最小值。

.

例 10.（2023，贵州）设多项式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，满足对任意 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\in[-1,1]$。求系数 $|c|$ 的最大可能值。