不变量与半不变量

一、知识要点

我们介绍两个极其重要的概念：不变量与单调变量（又称半不变量）。它们在与操作变换有关的组合问题中尤其有用。回顾定义：单调变量是指操作中单调变化的量（递增或递减），而不变量则是在操作中保持不变的量。在构建算法时，它们能从多个方面为我们提供帮助——单调变量常能指引我们思考“下一步该如何操作”。在后续的示例中，不变量与单调变量将在算法构建及其正确性验证中起到关键作用。

广义地说，物理学中的动量守恒、角动量守恒、机械能守恒，以及化学反应中的质量守恒、电荷守恒、元素守恒，都是不变量的重要例子。

二、例题精讲

例 1.（1989，IMO 预选题）在一个 $m\times n$ 的棋盘的每个方格中都写有一个自然数。在每一次操作中，可以将两个相邻数字中的每一个都加上一个整数 k，使得得到的数字仍是非负的（如果两个方格有一条公共边，则它们是相邻的）。求一个充分必要条件，使得存在一个操作序列，能在有限次操作后将所有数字都变为零。

例 2.（1999，ELMO）Jimmy 在格点上移动。每一次他可以从点 (x,y) 移动到以下任意一点：$(y,x),(3x,-2y),(-2x,3y),(x+1,y+4)$ 和 $(x-1,y-4)$。求证：如果 Jimmy 从点 $(0,1)$ 出发，则他永远无法到达点 $(0,0)$。

例 3.（2014，IMO 预选题）有2^m张卡片，每张卡片上写的数均为1。一次操作是指：选择两张不同的卡片，若这两张卡片上的数分别为a,b，则擦掉这两个数，并均写上数$a+b$。求证：经过任意$2^{m-1}m$次操作后，所有卡片上的数之和均至少为4^m。

例 4. 黑板上写有数字$1,2,...,2008$。在每一秒，Jimmy 可以擦去黑板上形如$a,b,c,a+b+c$的四个数字，并写上$a+b,b+c,c+a$。求证：这一操作过程至多能进行10分钟。

例 5.（2013，圣彼得堡数学奥林匹克）在黑板上写着区间$(0,1)$中的100个数。允许从中选择两个数a和b，把它们换成二次三项式x^2-ax+b的两个实根（如果有的话），证明这一过程不能无限进行下去。

例 6.（2012，IMO 预选题）n 个正整数排成一行。一次操作是指：选择两个相邻的数 x, y（满足 $x > y$ 且 x 在 y 的左边），用数对 $(y+1, x)$ 或 $(x-1, x)$ 代替 (x, y)。求证：只能进行有限次上述操作。

例 7.（2016，环球城市数学竞赛）黑板上写有若干个 37 次多项式，其中每个多项式的首项系数均为 1，且全体系数非负。在每一次操作中，允许擦去任意一对多项式 f, g，并替换成另一对 37 次首多项式 f_1, g_1，使得要么 $f_1 + g_1 = f + g$，要么 $f_1 g_1 = fg$。能否经过有限次上述操作，使得黑板上每个多项式都有 37 个不同的正根？

例 8.（1994，IMO 预选题）Peter 在银行有 3 个账户，每个账户中的金额均为整数美元。他只被允许进行如下操作：将钱从一个账户转入另一个账户，且转入后目标账户的金额必须翻倍。求证：（1）Peter 总能通过有限次操作，将所有钱集中到两个账户中。（2）他是否总能将所有钱集中到一个账户？

例 9.（2014，俄罗斯数学奥林匹克）初始时黑板上写有两个多项式 x^3-3x^2+5 和 x^2-4x。允许进行如下操作：如果黑板上有多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，则可以在黑板上写上 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(g(x))$，$cf(x)$，其中 c 为任意实数。经过有限次操作后，黑板上能否出现多项式 x^n-1？其中 n 为某个正整数。

例 10.（2016，罗马尼亚大师杯预选题）黑板上写有若干个正整数。在每一次操作中，可以擦去黑板上的任意一对整数 $n,n+1$，并替换为单个整数 $n-2$，此时允许黑板上出现负数和重复数字；也可以擦去黑板上的任意一对整数 $n,n+4$，并替换为 $n-1$。允许任意重复上述操作，黑板上可能出现的最小整数是多少？