

概率与期望-2

例 1. 一匹马在悬崖上徘徊, 如果再向前一步, 就要坠入深渊。幸好这匹马向前走一步的概率仅有 p ($0 \leq p \leq 1$), 向后退一步的概率却有 $1-p$ 。(1) $p = \frac{1}{3}$ 时, 求这匹马最终落入深渊的概率 P_1 。(2) 对一般的 $0 \leq p \leq 1$, 求这匹马最终落入深渊的概率 P_1 。

例 2. 上一题中, 设 m 为正整数, 马初始时在离深渊 m 步的地方, 向深渊走一步的概率为 p ($0 \leq p \leq 1$), 退一步的概率为 $1-p$ 。求马最终落入深渊的概率 P_m 。

例 3. 城中有 n 位姑娘即将出嫁, 其中一位嫁奩尤其丰富。她们将嫁奩的数目在屏幕上逐一打出。求婚者进入暗室后, 看到第一个出现的数, 可以选择确定或放弃第一位姑娘。如放弃, 屏幕上出现第二个数, 可以选择确定或放弃, 以此类推。(1) $n = 4$ 时, 试问要娶嫁奩最多的姑娘, 应采取什么策略? (2) 对一般的 $n \geq 4$, 应采取什么策略?

例 4. 赵大有 m 元赌本, 钱二有 n 元赌本, m, n 为正整数。每局赌一元 (胜者得到一元, 负者失去一元, 无平局), 直至赵大、钱二中有一人输光为止。(1) 如果每局赵大胜的概率为 p , 钱二胜的概率为 $q = 1 - p$, 且 $p > q$ 。请分别求出赵大和钱二输光的概率。(2) 如果每局赵大和钱二胜的概率都为 $\frac{1}{2}$, 请分别求出赵大和钱二输光的概率。

例 5. 剧院售票窗口前 $2n$ 个人排队买票, 每张票 5 元, 每人买一张票。其中 n 个人只有一张 10 元, n 个人只有一张 5 元。开始售票时, 售票窗口无钱可找。求 $2n$ 个人都能顺利买票, 不会因售票员无钱可找而等候的概率是多少?

例 6. 美国大选中, 如果两名候选人为特朗普和拜登, 他们在票箱中分别有 a, b ($a > b$) 张选票。请问在唱票过程中, 至少出现一次两人票数相等的概率是多少? 特朗普的票始终比拜登多的概率又是多少?

例 7. 拳手甲乙约定进行 m 个回合的比赛, m 为正整数。其中每个回合均决出胜负, 然后以胜的回合超过半数的一方为赢。如果每一回合, 甲胜的概率为 $p < \frac{1}{2}$ 。(1) 求甲赢的概率 P_m 。
(2) m 为什么数时甲赢的概率最大?

例 8. 甲乙两个赌徒约定谁先胜 s 局, 便赢得全部赌注。但在甲胜 $a < s$ 局, 乙胜 $b < s$ 局时, 赌博因警察来抓人中止。试求出倘若赌博继续下去, 甲乙胜的概率, 并以此作为依据合理地划分赌注。

例 9. 一位才貌双全的公主被关在一座城堡中。现有 n 把钥匙分给 n 位勇士依次开门, 但其中只有一把真的可以打开城门。问哪一名勇士打开城门的概率最大? 打开城门平均需要试多少次?

例 10. 对靶连续射击 n 次, 已知每次击中靶的概率为 p ($0 \leq p \leq 1$)。求 n 次中击中靶次数的期望。

例 11. 英国著名作家史蒂文生在“新天方夜谭”中描绘了一个自杀俱乐部。每晚由俱乐部的会长分牌, 拿到黑桃 Ace 的人会被会长设法谋杀。(1) 如果一张一张地发牌直至出现黑桃 Ace, 问平均发了多少张牌? (2) 如果将规则修改为拿到第一个 Ace (不论哪个花色) 的被谋杀, 问在出现第一个 Ace 前, 平均发了多少张牌?