# 抽屉原理

抽屉原理

一、知识要点

抽屉原理是组合数学中的一个基本原理。它在国外通常被称为“鸽巢原理（pigeonhole principle）。该原理最先是由德国数学家狄利克雷（Dirichlet）提出的，因此也被称为狄利克雷原理。它有以下几种形式：

（1）设 $m,n$ 是正整数，将多于 $mn$ 个元素放入 $n$ 个抽屉中，一定有某个抽屉中有至少 $m+1$ 个元素；

（2）设 $m,n$ 是正整数，将少于 $mn$ 个元素放入 $n$ 个抽屉中，一定有某个抽屉中有至多 $m-1$ 个元素；

（3）把不少于 $m_1+m_2+...+m_n+1$ 个元素放入 $n$ 个抽屉中，那么存在 $1\le i\le n$，使得在第 $i$ 个抽屉中有至少 $m_i+1$ 个元素；

（4）把不多于 $m_1+m_2+...+m_n-1$ 个元素放入 $n$ 个抽屉中，那么存在 $1\le i\le n$，使得在第 $i$ 个抽屉中有至多 $m_i-1$ 个元素；

（5）将无穷多个元素放入有限多个抽屉中，一定有某个抽屉中有无穷多个元素。

抽屉原理最简单直接的证明方法是反证法。采用极端原理也能对（1）（2）给出证明。与抽屉原理类似的，还有“平均数原理“和几何上的“重叠原理”：

（6）平均数原理：在 $n$ 个实数中，必有一个数不小于这 $n$ 个数的平均值，也必有一个数不大于这 $n$ 个数的平均值。

（7）重叠原理：若面积为 $S_1,S_2,...,S_n$ 的 $n$ 个图形均包含于一个面积为 $S$ 的区域内，其中 $S_1+S_2+...+S_n>S$，则这 $n$ 个图形中必有两个图形有重叠部分。这里的面积可以改为长度、体积等其它测度。

定理 1.（狄利克雷逼近定理）给定实数 $\alpha,Q\,(Q>1)$，则存在互素的整数 $p,q$ 满足 $1\le q<Q$ 且 $|q\alpha-p|\le\dfrac{1}{Q}$。

定理 2.（克罗内克逼近定理）设 $\theta$ 为正无理数，$\alpha\in[0,1]$，则对任意正实数 $\epsilon$，都存在正整数 $m,n$，使得 $|n\theta-m+\alpha|<\epsilon$。

二、例题精讲

例 1.（2012，高联）设 $P_0,P_1,...,P_n$ 是平面上 $n+1$ 个点，其两两间的距离的最小值为 $d\ (d>0)$。求证：$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdot...\cdot|P_0P_n|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$。

[提示：不妨设 $|P_0P_1|\le|P_0P_2|\le...\le|P_0P_n|$，尝试证明对任意 $1\le k\le n$，都有 $|P_0P_k|>\frac{d}{3}\sqrt{k+1}$。]

例 2.（Erdős-Szekeres）（1）设 $m,n$ 为正整数，则任意 $mn+1$ 个不同的实数组成的数列中一定能选出 $m+1$ 项的单调增子数列或 $n+1$ 项的单调减子数列。

[提示：设数列为 $\{x_i\}_{1\le i\le mn+1}$。对 $1\le i\le mn+1$，设 $a_i$ 为以 $x_i$ 结尾的最长单调增子数列的长度，$b_i$ 为以 $x_i$ 结尾的最长单调减子数列的长度。]

（2）设 $l,m,n$ 为正整数，则任意 $lmn+1$ 个实数组成的数列中一定能选出 $l+1$ 项相等的子数列或 $m+1$ 项的严格单调增子数列或 $n+1$ 项的严格单调减子数列。

例 3. 设 $k$ 为非负整数，$n=2^k$。求证：从任意 $2n-1$ 个整数中可选出 $n$ 个数，使得它们的和被 $n$ 整除。[提示：对 $k$ 作归纳。]

例 4. 设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 是斐波那契数列，$F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\geq 1)$。给定正整数 $l$，求证：（1）存在正整数 $m$，使得 $F_{a+m}\equiv F_a \pmod{l}$ 对任意正整数 $a$ 成立；

（2）存在正整数 $k$，使得 $l\mid F_k+1$ 且 $l\mid F_{k+1}-1$。

例 5. 设 $a$ 是给定整数，$a>1$，$A_n=1+a+...+a^n, n\geq 1$。求能整除数列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 中某一项的所有正整数。

例 6. 求证：存在正整数 $m$ 使得 $|\sin m|<10^{-10}$。[提示：使用狄利克雷逼近定理。]

例 7.（拉姆赛定理）将完全图 $K_6$ 的每条边染成红蓝两色之一，求证：（1）必有一个同色三角形（即三边颜色相同的三角形）；（2）必有两个同色三角形。

例 8. 有 17 位学者，每一位都给其余的人写一封信，信的内容是讨论三个问题中的一个，而且两个人互相通信讨论的是同一个问题。求证：至少有三位学者，他们之间通信讨论的是同一个问题。

[提示：问题可以看作给完全图 $K_{17}$ 的边三染色，要证存在同色三角形。]