由平方数组成的非常值等差数列能有多长?

本文中，我们证明如下结论：（1）存在无穷多个长为3的非常值等差数列，它每项都是完全平方数，且不同项之间互素。（2）不存在长为4的非常值等差数列，它每项都是完全平方数。

我们从勾股方程的本原解讲起。这个结论简洁、漂亮而且深刻，是笔者眼中算术代数几何的第零课。我们给出两种证明，法一是高中数学竞赛书中常见的证法；法二讲述了它的高等背景，即寻找单位圆上的有理点，但在高中阶段的参考书中几乎找不到这种证明。

定理 0.1 (本原勾股数组)**.** 设(a,b,c)是一个本原勾股数组，即a,b,c是两两互素的正整数，满足$a^2+b^2=c^2$。则存在一奇一偶且互素的两个正整数u,v，使得$a=u^2-v^2$，$b=2uv$，$c=u^2+v^2$ ①，或者$a=2uv$，$b=u^2-v^2$，$c=u^2+v^2$ ②。

证. 法一：分析奇偶性可知a,b一奇一偶，不妨设$2\nmid a$，$2\mid b$，则$(\frac{b}{2})^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2}$，因为$(\frac{c+a}{2},\frac{c-a}{2})=(\frac{c+a}{2},c)=1$，所以存在一奇一偶且互素的两个正整数$u,v$，使得$\frac{c+a}{2}=u^2$，$\frac{c-a}{2}=v^2$。于是①式成立。

法二：设$x=\frac{a}{c}$，$y=\frac{b}{c}$，则$x^2+y^2=1$。以$(-1,0)$为中心作球极投影$\varphi:\mathbb{S}^1\backslash\{(-1,0)\}\to\mathbb{R}$，$(x,y)\mapsto k=\frac{y}{x+1}$，则它是去掉一点的单位圆和直线两个点集之间双有理的一一映射。$x,y\in\mathbb{Q}$能推出$k\in\mathbb{Q}$，此时存在互素的整数p,q，$q>0$，使得$k=\frac{p}{q}$。φ的逆映射如下：$x=\frac{1-k^2}{1+k^2}$，$y=\frac{2k}{1+k^2}$。讨论p,q的奇偶性：(i) 若p,q一奇一偶，则$x=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}=\frac{a}{c}$，$y=\frac{2pq}{p^2+q^2}=\frac{b}{c}$，$(q^2-p^2,p^2+q^2)=(2q^2,p^2+q^2)=1$，$(2pq,p^2+q^2)=1$。因为对任一有理数$r$，存在唯一的$m,n\in\mathbb{Z}$，$(m,n)=1$，$n>0$，使得$r=\frac{m}{n}$，所以$a=q^2-p^2$，$b=2pq$，$c=p^2+q^2$，令$u=q$，$v=p$，得①式成立。(ii) 若$p,q$都是奇数，设$u=\frac{p+q}{2}$，$v=\frac{q-p}{2}$，则$u,v$一奇一偶，$x=\frac{2uv}{u^2+v^2}=\frac{a}{c}$，$y=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}=\frac{b}{c}$，$a=2uv$，$b=u^2-v^2$，$c=u^2+v^2$，②式成立。注：本证法其实还和三角函数的万能公式有关系。单位圆上任意一点的坐标可以表示为$(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，设$t=\tan\frac{\theta}{2}$，则$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，它们都能写为$\tan\frac{\theta}{2}$的有理式。 □

有了上述定理，我们可以寻找所有长为3的非常值等差数列，它每项都是完全平方数，且不同项之间互素。设$a^2+c^2=2b^2$，$0<a<b<c$ ①，且a,b,c两两互素。分析上式的奇偶性知a,b,c均为奇数，设$x=\frac{c-a}{2}$，$y=\frac{c+a}{2}$，则x,y为一奇一偶且互素的两个正整数，且$x^2+y^2=b^2$。由本原勾股数定理，存在一奇一偶且互素的两个正整数u,v，使得(i)$x=u^2-v^2$，$y=2uv$，$b=u^2+v^2$，此时$a=x-y=u^2-2uv-v^2$，$c=x+y=u^2+2uv-v^2$；(ii)或者$x=2uv$，$y=u^2-v^2$，$b=u^2+v^2$，此时$a=x-y=2uv+v^2-u^2$，$c=x+y=u^2+2uv-v^2$。至此，我们证明了对不定方程①的两两互素的解(a,b,c)，存在一奇一偶且互素的两个正整数u,v，$u>v$，使得$a=|u^2-2uv-v^2|$，$b=u^2+v^2$，$c=u^2+2uv-v^2$ ②。反之，有了一奇一偶且互素的两个正整数u,v，$u>v$，由②式就能构造出两两互素的三个平方数，它们组成非常值等差数列。

费马于1640年提出了一个问题：是否存在长为4的等差数列，它不是常数，且每项都是完全平方数？答案是否定的。我们会给出两种证法，证法一简洁优美地使用了无穷递降法。证法二中会展示如何把四项平方构成等差数列的有理数，转换为椭圆曲线$y^2=(x-1)(x^2-4)$上的有理点。

例 0.1. 求证：不存在不全相等的正整数a,b,c,d，使得$a^2+c^2=2b^2$，$b^2+d^2=2c^2$ ①。

证. 法一：反证法，若方程①存在正整数解，可以假设a,b,c,d两两互素，且$0<a<b<c<d$。考察方程奇偶性知a,b,c,d全是奇数。于是存在一奇一偶且互素的正整数u,v，使得$a=u-v$，$c=u+v$，$u^2+v^2=b^2$，等差数列的公差为$\frac{c^2-a^2}{2}=2uv$。我们有$d^2-b^2=4uv$，$\frac{d+b}{2}\cdot\frac{d-b}{2}=uv$。上式左侧的两个因子互素，$u,v$也

互素，所以存在两两互素的四个正整数A,B,C,D，使得$u=AB,\ v=CD,\ d+b=2AC,\ d-b=2BD$。因为$\frac{d+b}{2}$，$\frac{d-b}{2}$一奇一偶，$u,v$也是一奇一偶，所以$A,B,C,D$中恰有一个偶数。这意味着$b=AC-BD$，所以我们可以代入方程$u^2+v^2=b^2$，得到$(AB)^2+(CD)^2=(AC-BD)^2$。这是一个四元四次方程，对每个变量是对称的，所以我们可以不妨设C是偶数，A,B,D是奇数（A,B或D为偶数的情况同理可证）。上式即$C^2(D^2-A^2)+2ABCD+B^2(A^2-D^2)=0$，它的判别式$4B^2(A^2D^2+(D^2-A^2)^2)$为完全平方数，于是存在整数$m$使得$A^2D^2+(D^2-A^2)^2=A^4-A^2D^2+D^4=m^2$ ②。因为A,D都是奇数，分析上式奇偶性知m为奇数。所以存在互素的整数x,y，使得$A^2=k(x+y),\ D^2=k(x-y),\ k=\pm 1$ ③。代入②式，我们得到$x^2+3y^2=m^2$，由此看出y为偶数，x为奇数，且$3\nmid x$（否则$3\mid m,y$，与x,y互素矛盾）。可以适当地选取x和k的符号，使得$3\mid m+x$，我们有$3\cdot(\frac{y}{2})^2=\frac{m+x}{2}\cdot\frac{m-x}{2}$，这意味着存在一奇一偶且互素的正整数$r,s$，使得$\frac{m+x}{2}=3r^2,\ \frac{m-x}{2}=s^2$。于是$m=3r^2+s^2,\ x=3r^2-s^2,\ y=\pm 2rs$。将上式中的$x,y$代回③式（如有必要交换$A,D$），我们得到$A^2=k(s+r)(s-3r),\ D^2=k(s-r)(s+3r)$。因为上两式右边的因子互素，所以四个数$s-3r,\ s-r,\ s+r,\ s+3r$ ④的绝对值都是完全平方数。因为$s+3r,s+r>0$，所以它们是奇平方数，模8都余1。于是$8\mid 2r=(s+3r)-(s+r),\ 4\mid r,\ s-r,\ s-3r\equiv 1 \pmod 8$，④式中的四个数符号都为正。于是我们必有$s>3r$，所以$m=3r^2+s^2>12r^2$。由四次方程②知$m<A^2+D^2$，于是有$2r<\sqrt{\frac{2}{3}}\max(A,D)$。所以④式中有四个平方数成等差数列，它们的公差为$|2r|<|2ABCD|$，后者是原等差数列$a^2,b^2,c^2,d^2$的公差。由最小数原理，方程①必有使公差最小的正整数解，但由以上论述可以找到公差更小的一组正整数解，矛盾！

法二：我们仿照本原勾股数定理，分别对$a^2+c^2=2b^2,\ b^2+d^2=2c^2$ ①这两个方程作球极投影。若方程①存在正整数解，可以假设a,b,c,d两两互素，且$0<a<b<c<d$。设$u=\frac{c+a}{2b},\ v=\frac{c-a}{2b}$，则$u,v\in\mathbb{Q},\ u^2+v^2=1$。设$k=\frac{v}{u+1}=\frac{c-a}{c+a+2b}\in\mathbb{Q}$，则

$$\frac{c-a}{2b}=\frac{2k}{1+k^2},\qquad \frac{c+a}{2b}=\frac{1-k^2}{1+k^2},\qquad \frac{c}{b}=\frac{c-a}{2b}+\frac{c+a}{2b}=\frac{1+2k-k^2}{1+k^2},\qquad ②$$

同理，设$u'=\frac{d+b}{2c},\ v'=\frac{d-b}{2c}$，则$u',v'\in\mathbb{Q},\ u'^2+v'^2=1$。设$l=\frac{v'}{u'+1}=\frac{d-b}{d+b+2c}\in\mathbb{Q}$，则

$$\frac{d-b}{2c}=\frac{2l}{1+l^2},\qquad \frac{d+b}{2c}=\frac{1-l^2}{1+l^2},\qquad \frac{b}{c}=\frac{d+b}{2c}-\frac{d-b}{2c}=\frac{1-2l-l^2}{1+l^2},\qquad ③$$

因为$1=\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}$，由②,③式，$(1+2k-k^2)(1-2l-l^2)=(1+k^2)(1+l^2)$，打开整理得

$$k-l-2kl+kl(k-l)=k^2+l^2,\qquad (k-l)(1+kl)=(k+l)^2,$$

设$s=k+l,\ t=k-l$，上式即$t(1+\frac{s^2-t^2}{4})=s^2,\ t^2-4=s^2(1-\frac{4}{t})$ ④。设$x=\frac{4}{t},\ y=\frac{sx(x-1)}{2}$，

$$④式\Longleftrightarrow s^2(1-x)=\frac{16}{x^2}-4\Longleftrightarrow s^2(x-1)=\frac{4}{x^2}(x^2-4),$$
$$\Longleftrightarrow y^2=[\frac{sx(x-1)}{2}]^2=(x-1)(x^2-4),\qquad ⑤$$

在复射影空间$\mathbb{CP}^3=\{[a:b:c:d],a,b,c,d\in\mathbb{C}且不全为零\}$中，方程①是两个二次曲面的交。上述从$(a,b,c,d)$到$(x,y)$的变换实际上给出了这个相交的代数簇到椭圆曲线⑤的一个双有理等价，设该映射为φ。我们说明了给定方程①的一组两两互素的正整数解，能得到椭圆曲线⑤上的一个有理点。反之，从椭圆曲

线⑤上的一个有理点能得到方程①的一组两两互素，且$a>0$的整数解（注意这里我们无法保证a,b,c,d都是正整数）。这是因为我们能显式地写出φ的逆映射:

$$s=\frac{2y}{x(x-1)},\qquad t=\frac{4}{x},\qquad k=\frac{s+t}{2},\qquad l=\frac{s-t}{2},$$
$$\frac{c}{b}=\frac{1+2k-k^2}{1+k^2}=\frac{1+l^2}{1-2l-l^2},\qquad \frac{a}{b}=\frac{1-2k-k^2}{1+k^2},\qquad \frac{d}{c}=\frac{1+2l-l^2}{1+l^2},$$

下面我们来寻找椭圆曲线⑤上的所有有理点。篇幅所限，我们将此内容编排在本题证明过程以外。 □

先列举四个性质较好的有理点，用φ或它的逆映射作用在这些点上不会遇到无穷大或无穷小等难以处理的情况。

a,b,c,d	k,l	s,t	x,y
$1,1,-1,-1$	$-1,1$	$0,-2$	$-2,0$
$1,1,1,-1$	$0,-1$	$-1,1$	$4,-6$
$1,-1,-1,-1$	1,0	1,1	4,6
$1,-1,-1,1$	$1,-1$	0,2	2,0

其余情况涉及无穷大与无穷小，需要更小心地讨论。设$(a,b,c,d)=(\sqrt{1-\epsilon},\ \pm1,\ \pm\sqrt{1+\epsilon},\ \pm\sqrt{1+2\epsilon})$，我们考虑$\epsilon\to0$时$a,b,c,d$的渐近性态。由广义的二项式定理，我们有$a=1-\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon^2-\frac{1}{16}\epsilon^3+O(\epsilon^4)$，$|c|=1+\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon^2+\frac{1}{16}\epsilon^3+O(\epsilon^4)$，$|d|=1+\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon^2+\frac{1}{2}\epsilon^3+O(\epsilon^4)$。（1）$(a,b,c,d)=(\sqrt{1-\epsilon},\ 1,\ -\sqrt{1+\epsilon},\ \sqrt{1+2\epsilon})$，此时

$$k=\frac{c-a}{c+a+2b}=-1+O(\epsilon),\qquad l=\frac{d-b}{d+b+2c}=\frac{\epsilon+O(\epsilon^2)}{-\frac{1}{2}\epsilon^2+2\cdot\frac{1}{8}\epsilon^2+O(\epsilon^3)}=-\frac{4}{\epsilon}+O(1),$$
$$s=k+l=-\frac{4}{\epsilon}+O(1),\qquad t=k-l=\frac{4}{\epsilon}+O(1),\qquad x=\frac{4}{t}=\epsilon+O(\epsilon^2),\qquad y=\frac{sx(x-1)}{2}=2+O(\epsilon),$$

（2）$(a,b,c,d)=(\sqrt{1-\epsilon},\ -1,\ \sqrt{1+\epsilon},\ \sqrt{1+2\epsilon})$，此时

$$k=\frac{c-a}{c+a+2b}=\frac{\epsilon+O(\epsilon^2)}{-\frac{1}{4}\epsilon^2+O(\epsilon^3)}=-\frac{4}{\epsilon}+O(1),\qquad l=\frac{d-b}{d+b+2c}=1+O(\epsilon),$$
$$s=-\frac{4}{\epsilon}+O(1),\qquad t=-\frac{4}{\epsilon}+O(1),\qquad x=\frac{4}{t}=-\epsilon+O(\epsilon^2),\qquad y=\frac{sx(x-1)}{2}=-2+O(\epsilon),$$

以上两种情况中，我们只取未知数的渐近展开中的首项，得到下表:

a,b,c,d	k,l	s,t	x,y
$1,1,-1,1$	$-1,-\frac{4}{\epsilon}$	$-\frac{4}{\epsilon},\frac{4}{\epsilon}$	$\epsilon,2$
$1,-1,1,1$	$-\frac{4}{\epsilon},1$	$-\frac{4}{\epsilon},-\frac{4}{\epsilon}$	$-\epsilon,-2$

前两种情况中我们只需计算每个未知数泰勒展开的首项，后面两种情况更复杂，需要计算更高次的泰勒展开。（3）$(a,b,c,d)=(\sqrt{1-\epsilon},\ -1,\ \sqrt{1+\epsilon},\ -\sqrt{1+2\epsilon})$，此时

$$k=\frac{\epsilon+\frac{1}{8}\epsilon^3+O(\epsilon^5)}{-\frac{1}{4}\epsilon^2-\frac{5}{64}\epsilon^4+O(\epsilon^6)}=-\frac{4}{\epsilon}+\frac{3}{4}\epsilon+O(\epsilon^3),\qquad l=\frac{-\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon^2-\frac{1}{2}\epsilon^3+O(\epsilon^4)}{\frac{1}{4}\epsilon^2-\frac{3}{8}\epsilon^3+\frac{35}{64}\epsilon^4+O(\epsilon^5)}=-\frac{4}{\epsilon}-4+\frac{3}{4}\epsilon+O(\epsilon^2),$$
$$s=-\frac{8}{\epsilon}+O(1),\qquad t=4+O(\epsilon^2),\qquad x=\frac{4}{t}=1+O(\epsilon^2),\qquad y=\frac{sx(x-1)}{2}=O(\epsilon),$$

（4）$(a,b,c,d)=(\sqrt{1-\epsilon},\ 1,\ \sqrt{1+\epsilon},\ \sqrt{1+2\epsilon})$，此时

$$k=\frac{\epsilon+O(\epsilon^3)}{4+O(\epsilon^2)}=\frac{\epsilon}{4}+O(\epsilon^3),\qquad l=\frac{\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon^2+O(\epsilon^3)}{4+2\epsilon+O(\epsilon^2)}=\frac{\epsilon}{4}-\frac{\epsilon^2}{4}+O(\epsilon^3),\qquad s=\frac{\epsilon}{2}+O(\epsilon^2),$$
$$t=\frac{\epsilon^2}{4}+O(\epsilon^3),\qquad x=\frac{4}{t}=16\epsilon^{-2}+O(\epsilon^{-1}),\qquad y=\frac{sx(x-1)}{2}=64\epsilon^{-3}+O(\epsilon^{-2}),$$

类似地，只取未知数的渐近展开中的首项，得到下表：

a,b,c,d	k,l	s,t	x,y
$1,-1,1,-1$	$-\frac{4}{\epsilon},-\frac{4}{\epsilon}$	$-\frac{8}{\epsilon},4$	$1,O(\epsilon)$
1,1,1,1	$\frac{\epsilon}{4},\frac{\epsilon}{4}$	$\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon^2}{4}$	$16\epsilon^{-2},64\epsilon^{-3}$

我们宣称以上这八个点，即$(x,y)=(\pm2,0),(0,\pm2),(1,0),(4,\pm6)$再加上无穷远处的$[0:1:0]$，就是椭圆曲线$y^2=(x-1)(x^2-4)$上的所有有理点。（后面完整的故事还很长，暂时写不完了。）

回到初等的内容。无穷递降法的历史可以追溯到古希腊毕达哥拉斯的时代。例如它可以小试牛刀地证明$\sqrt{2}$是无理数：若$a=\sqrt{2}b,\ a,b\in\mathbb{Z}_+$，且$b$最小，则$2b=\sqrt{2}a,\ 2b-a=\sqrt{2}(a-b)$。因为$1<\sqrt{2}<2$，所以$0<a-b<b$，矛盾！这实际上证明了不定方程$a^2=2b^2$没有正整数解。注意这个证明非常朴素，我们没有在证明中使用算术基本定理对a,b做素因数分解。

文章的最后，让我们使用球极投影解一道数学竞赛题。笔者暂时不知道它出自什么比赛。

例 0.2. 已知有理数a,b,c使得$a+b+c=a^2+b^2+c^2\in\mathbb{Z}$。求证：存在互素的整数$u,v$，满足$abc=\dfrac{u^2}{v^3}$。

证. 设$S=a+b+c=a^2+b^2+c^2$，则$S=a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{S^2}{3}$，所以$0\leq S\leq 3$。下面就$S$的取值分类讨论。（1）$S=1$，若$(a,b,c)=(0,0,1)$，令$u=0,\ v=1$即可。若$(a,b,c)\neq(0,0,1)$，设$\mathbb{S}^2$是单位球面，从$(0,0,1)$作球极投影$\varphi:\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2,\ (a,b,c)\mapsto(x,y)=(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c})$。$\varphi$将两个点集建立起双有理的一一对应，它将有理点映为有理点，它的逆也将有理点映为有理点。事实上，φ也是以$(0,0,1)$为中心，$\sqrt{2}$为半径的反演变换。我们有

$$x=\frac{a}{1-c},\qquad y=\frac{b}{1-c},\qquad x+y=\frac{a+b}{1-c}=1,\qquad x^2+y^2=\frac{1-c^2}{(1-c)^2}=\frac{1+c}{1-c}=\frac{2}{1-c}-1,$$
$$\varphi\text{的逆映射如下：因为}\frac{2}{1-c}=x^2+y^2+1,\qquad \text{所以}c=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1},\qquad a=x(1-c)=\frac{2x}{x^2+y^2+1},$$
$$b=y(1-c)=\frac{2y}{x^2+y^2+1},\qquad \text{设}x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=1,\ q>0,\qquad \text{则}y=1-x=\frac{q-p}{q},$$
$$\begin{aligned}abc=\frac{4xy(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}&=(4\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{q-p}{q}\cdot\frac{p^2+(q-p)^2-q^2}{q^2})\Big/(\frac{p^2+(q-p)^2+q^2}{q^2})^3\\&=\frac{p^2q^2(q-p)^2}{(pq-p^2-q^2)^3},\qquad \text{令}u=pq(q-p),\ v=pq-p^2-q^2,\end{aligned}$$

因为$(p,v)=(p,-q^2)=1,\ (q,v)=(q,-p^2)=1,\ (q-p,v)=(q-p,-q^2)=1$，所以$(u,v)=1$，且满足$abc=\dfrac{u^2}{v^3}$。（2）$S=2$，此时设$a'=1-a,\ b'=1-b,\ c'=1-c$，则$a',b',c'\in\mathbb{Q}$，且$a'+b'+c'=a'^2+b'^2+c'^2=1$。由情形（1）的讨论，存在$x,y\in\mathbb{Q},\ x+y=1$，使得$a'=\dfrac{2x}{x^2+y^2+1},\ b'=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1},\ c'=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$。

设$x=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$, $q>0$，则有

$$a=1-a'=\frac{2(q-p)^2}{p^2+(q-p)^2+q^2}=\frac{(q-p)^2}{p^2-pq+q^2},\qquad b=1-b'=\frac{2p^2}{p^2+(q-p)^2+q^2}=\frac{p^2}{p^2-pq+q^2}$$
$$c=1-c'=\frac{2q^2}{p^2+(q-p)^2+q^2}=\frac{q^2}{p^2-pq+q^2},\qquad \text{于是}abc=\frac{p^2q^2(p-q)^2}{(p^2-pq+q^2)^3},$$

令$u=pq(q-p)$, $v=p^2-pq+q^2$，由（1）问的论述知$(u,v)=1$，且满足$abc=\dfrac{u^2}{v^3}$。（3）$S=0$，则$a=b=c=0$，令$u=0$, $v=1$即可。（4）$S=3$，则$0=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，$a=b=c=1$，令$u=1$, $v=1$即可。 □

作为结语，寻找代数簇上的有理点是近年非常重要且热门的一个研究方向，我们简要地介绍近年和该方向有关的两个伟大的工作。第一个工作来自德国数学家法尔廷斯（Gerd Faltings，1954年至今）。他凭借证明了Mordell猜想获得1986年的菲尔兹奖，该猜想的叙述如下：有理数域上亏格数大于一的代数曲线上只有有限个有理点。法尔廷斯定理令人惊异地描绘了曲线亏格（它的定义来自该曲线上的复点形成的黎曼面，是曲线的拓扑性质），与曲线上有理点数量（这是曲线的算术性质）的深刻联系。第二个工作来自英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles，1953年至今），他对费马大定理的证明被公认为二十世纪最伟大的数学成就。用算术几何的语言来陈述费马大定理的内容就是证明$n\geq 3$时曲线$x^n+y^n=1$上没有非平凡的有理点（即$x,y\neq 0$, $x,y\in\mathbb{Q}$的点）。笔者从很久以前就对这两个定理心怀憧憬，遗憾的是，有生之年要想搞懂二者中任何一个的证明可能性都不大。