关联几何：从Sylvester-Gallai定理说起

在数学中，关联几何是对关联结构的研究。欧氏平面几何结构是一个复杂的对象，涉及长度、角度、连续性和关联性等概念。当所有其他概念都被移除，剩下关于哪些点位于哪些线上（即关联性）的信息时，就会得到一个关联结构。即使条件如此匮乏，人们也能得到不平凡的定理，并发现有关关联结构的有趣事实。

例 0.1. 给定平面上n个点的集合$\mathcal{P}$，将一条普通直线定义为正好包含$\mathcal{P}$中两个点的直线。经典的Sylvester-Gallai定理（1893年由J.J.Sylvester作为问题首次提出）断言，只要$\mathcal{P}$的点不是全部共线，$\mathcal{P}$中就有至少一条普通直线。

*L.M.Kelly*的证明. 该证明简洁优美，巧妙地使用了欧氏平面上的距离（这是关联结构之外的概念），以及极端原理。考虑通过$\mathcal{P}$的至少两个点的所有直线的集合$\mathcal{L}$。在直线$L \in \mathcal{L}$及不在L上的点p所形成的诸对(p, L)中（因为$\mathcal{P}$中的点不全部共线，所以这样的对必然存在），存在一对(p_0, L_0)，使得p_0与L_0的距离最小。我们证明L_0是一条普通直线。否则L_0上至少有三个点，设q是p_0到L_0的投影，则L_0上$\mathcal{P}$的点中必有两个在q的同侧，设它们为p_1, p_2。不妨设p_1在q和p_2之间（允许p_1与q重合），直线p_0p_2为L_1，则$d(p_1, L_1) < d(p_0, L_0)$，矛盾！所以$L_0$是一条普通直线。 □

Gallai于1944年对上述定理发表了一个早期的证明。但在此之前，Melchior于1941年得到了比上述定理更强的结果（他当时考虑的实际上是Sylvester问题在实射影平面上的对偶，即下述命题③），它的叙述和证明如下。

例 0.2. （1）设平面上有不全共线的n个点，$n \geq 3$，则恰好过其中两点的直线数量大于等于3　①；
（2）（Melchior不等式）考虑实射影平面上不全部共点的n条直线，它们之间有若干交点。$k \geq 2$时，设t_k为恰有k条直线经过的交点数量，则有$t_2 \geq 3 + \sum_{k \geq 4}(k-3)t_k$　②。

*Melchior*的证明. 该证明的关键是使用了不超过19世纪的代数拓扑。
（1）将平面扩充为实射影平面$\mathbb{RP}^2$，并考虑关于单位圆$\omega: x^2 + y^2 = 1$的极点-极线对偶（即把命题①中的点换为它关于ω的极线，把命题①中的线换为它关于ω的极点），则命题①$\Longleftrightarrow$设$\mathbb{RP}^2$上有不共点的n条直线，$n \geq 3$，则恰有两条直线经过的交点数量大于等于3　③。下面证明命题③。设这n条直线将$\mathbb{RP}^2$划分为V个顶点，E条边，F个面，则必有$V - E + F = \mathbb{RP}^2$的欧拉示性数 $= 1$。设这n条直线为$\{l_i\}_{1 \leq i \leq n}$，对任意一条直线$l_i$，$1 \leq i \leq n$，它在$\mathbb{RP}^2$中与其他$n-1$条直线各有一个交点，且这$n-1$个交点不全相同，否则$\{l_j\}_{1 \leq j \leq n}$交于一点，矛盾！所以$l_i$上至少有两个与其他直线的交点。设$f$是一个面，它的一条边在$l_i$上，则$f$中与这条边相邻的两边在另两条直线$l_j, l_k$上，$i, j, k$互不相同。这说明任意面$f$至少有3条边。因为每条边恰在两个面的边界上，所以算两次得$3F \leq$ 每个面的边数之和 $= 2E$，$1 = V - E + F \leq V - \frac{1}{3}E$，$E \leq 3V - 3$。设所有交点为$\{v_i\}_{1 \leq i \leq V}$，有$n_i$条直线交于$v_i$，$n_i \geq 2$，$1 \leq i \leq V$。因为每条边恰以两个交点为端点，以$v_i$为端点的边有$2n_i$条（这里用到每条直线上至少有两个交点），所以

$$2E = \sum_{i=1}^{V} 2n_i, \quad E = \sum_{i=1}^{V} n_i \leq 3V - 3, \quad 3 \leq \sum_{i=1}^{V}(3 - n_i) \leq \#\{n_i = 2, \quad 1 \leq i \leq V\}, \qquad ④$$

这说明至少有3个点恰被两条直线经过，命题③, ①得证。
（2）在上述记号下，$t_k = \#\{n_i = k, \quad 1 \leq i \leq V\}$，由④式，$\sum_{k \geq 2} t_k(3-k) \geq 3, \quad t_2 \geq 3 + \sum_{k \geq 4}(k-3)t_k$，②式成立。 □

习题 0.1. 设平面上有不全共线的n个点，构成点集$\mathcal{P}$。求证：（1）$n = 3, 4, 6, 7$时，最少有3条普通直线；
（2）$n = 5, 8$时，最少有4条普通直线。并在这两问中给出普通直线数量达到最小值时的构造。

提示. 设$\mathcal{P}$中的点之间定义了m条直线$\{l_i\}_{1\le i\le m}$，直线$l_i(1\le i\le m)$上有k_i个点。我们有$\sum_{i=1}^{m}\binom{k_i}{2}=\binom{n}{2}$。 $\square$

值得一提的是，上述定理只在实数域上，即$\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^2$时成立，在其他域上不成立。例如:

（1）设p为素数，$\alpha\ge 1$, $q=p^{\alpha}\ge 3$，将定理中的$\mathbb{R}$换成q个元素构成的有限域$\mathbb{F}_q$，令$\mathcal{P}=\mathbb{F}_q^2$，则$\mathcal{P}$上任意两点的连线$L$是仿射平面$\mathbb{F}_q^2$上的一条直线，$L$上有$q$个点。

（2）若将定理中的$\mathbb{R}$换成$\mathbb{C}$，我们考察由9个点和12条直线构成的Hesse构型，其中每条线过三个点，每个点在四条线上。它可以在复射影平面$\mathbb{CP}^2$（或者复仿射平面$\mathbb{C}^2$）中由一条椭圆曲线的拐点集实现。（注：定义平面上一条光滑曲线C上的一点P为曲线C的拐点，若过P作C的切线l，l与C相交的阶数至少为3。）

具体来说，设$E: X^3+Y^3+Z^3=0$是复射影平面$\mathbb{CP}^2=\{[X:Y:Z],X,Y,Z\in\mathbb{C}$不全为0，且对任意非零的$\lambda\in\mathbb{C}$, $[X:Y:Z]=[\lambda X:\lambda Y:\lambda Z]\}$上的费马三次曲线，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则$E$的拐点集为

$$\begin{aligned}&[-1:1:0],\quad [-\omega:1:0],\quad [-\omega^2:1:0],\\&[-1:0:1],\quad [-\omega:0:1],\quad [-\omega^2:0:1],\\&[0:-1:1],\quad [0:-\omega:1],\quad [0:-\omega^2:1],\end{aligned}\tag{1}$$

它们之间能定义12条直线，每条直线恰好经过其中的三个点。这12条直线为

$$\begin{gathered}X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\quad X+Y+Z=0,\quad X+Y+\omega Z=0,\quad X+Y+\omega^2 Z=0,\\X+\omega Y+Z=0,\quad X+\omega^2 Y+Z=0,\quad \omega X+Y+Z=0,\\\omega^2 X+Y+Z=0,\quad \omega X+\omega^2 Y+Z=0,\quad \omega X+Y+\omega^2 Z=0,\end{gathered}$$

习题 0.2. 下面计算费马三次曲线E过(1)中9个点的切线。设$P[X_0:Y_0:Z_0]$是E上一点，对定义E的三次方程在P点处求微分，得$0=\mathrm{d}(X^3+Y^3+Z^3)=3X_0^2\mathrm{d}X+3Y_0^2\mathrm{d}Y+3Z_0^2\mathrm{d}Z$，分别代入$\mathrm{d}X=X-X_0$, $\mathrm{d}Y=Y-Y_0$, $\mathrm{d}Z=Z-Z_0$，得

$$0=X_0^2(X-X_0)+Y_0^2(Y-Y_0)+Z_0^2(Z-Z_0)=X_0^2X+Y_0^2Y+Z_0^2Z,$$

这就是E过P点处的切线方程。分别代入(1)中九个点的坐标，得到九条切线方程分别为

$$\begin{gathered}X+Y=0,\quad X+\omega Y=0,\quad X+\omega^2 Y=0,\\X+Z=0,\quad X+\omega Z=0,\quad X+\omega^2 Z=0,\\Y+Z=0,\quad Y+\omega Z=0,\quad Y+\omega^2 Z=0,\end{gathered}$$

习题 0.3. 下面验证直线$X+Y=0$与E在$P[-1:1:0]$处的相交重数确实大于等于3。令$y=-\dfrac{Y}{X}$, $z=-\dfrac{Z}{X}$，我们得到E在$P[-1:1:0]$点的邻域上可被视为仿射平面上的三次曲线$y^3+z^3=1$。它在点$P'(1,0)$处的切线为$y=1$。在P'附近，由二项式定理，$y=(1-z^3)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}z^3+O(z^6)$，所以$y=1$与$y^3+z^3=1$在$P'$处相交的重数为3，直线$X+Y=0$与$E$在$P$处相交的重数为3。