

帕普斯，帕斯卡，夏莱：Cayley-Bacharach定理和它的前世

古希腊数学家帕普斯（Pappus of Alexandria，约公元290年—公元350年）是数学史上一名伟大的先驱。他研究并恢复了许多阿波罗尼斯等他的前辈遗失的工作，留有流传至今的著作 *Mathematicae Collectiones*。他发现了射影几何中的下述定理。

定理 0.1 (帕普斯定理). 如图1, 在射影平面上, A, B, C 三点共线, D, E, F 三点共线, BF 与 CE 相交于 X , CD 与 AF 相交于 Y , AE 与 BD 相交于 Z . 我们有: X, Y, Z 三点共线。

证. 这里给出一个使用射影几何的证法。如图2, 在射影平面上, 不妨设直线 XZ 为无穷远直线, 即 $AE \parallel BD$, $BF \parallel CE$ 。只需证明 Y 也在无穷远直线上, 即 $AF \parallel CD$ 。设 AE 交 BF 于点 J , BD 交 CE 于点 K , 则四边形 $BJEK$ 是平行四边形, $\triangle ABJ \sim \triangle BCK$, $\triangle DEK \sim \triangle EFJ$ 。所以 $\angle AJF = \angle BJE = \angle BKE = \angle CKD$, 且 $AJ \cdot CK = BJ \cdot BK = EK \cdot EJ = FJ \cdot DK$ 。于是 $\triangle AJF \sim \triangle DKC$, $\angle FAJ = \angle CDK$, 又因为 $AE \parallel BD$, 所以 $AF \parallel CD$ 。□

注: (1) 可将插图1中的 A, X, B, Y, C, Z 三组标签交换, 或将 D, X, E, Y, F, Z 三组标签交换, 结论依然成立。也就是说, (A, B, C) , (D, E, F) , (X, Y, Z) 三组点中, 已知两组三点共线, 就能推出第三组三点共线。更不容易察觉的是, 插图中 (A, Y, F) , (B, Z, D) , (C, X, E) 这三组点, 已知两组三点共线, 也能推出第三组三点共线。类似地, (A, Z, E) , (B, X, F) , (C, Y, D) 这三组点, 已知两组三点共线, 也能推出第三组三点共线。(2) 用上一篇文章的眼光来看, 帕普斯定理是一个关联几何的命题, 因为它的条件和结论都只和点线之间的关联结构有关。(3) 由 $AE \parallel BD$, $BF \parallel CE$ 推出 $AF \parallel CD$ 的命题被称为帕普斯定理的仿射形式。

法国天才少年帕斯卡 (Blaise Pascal, 1623年—1662年) 在数学, 物理学, 哲学等领域都有卓越的建树。他于1639年, 即16岁时发现了下述定理, 作为帕普斯定理的一个推广。

定理 0.2 (帕斯卡定理). 如图3, 在射影平面上, A, B, C, D, E, F 六点在同一个二次曲线 Γ 上, AB 与 DE 相交于 X , BC 与 EF 相交于 Y , CD 与 FA 相交于 Z 。我们有: X, Y, Z 三点共线。

Γ 是圆时的证明. 这个简洁的三角证法来自笔者24年暑假在深实验上几何课时的一名学生, 我当时没认齐学生, 所以还不知道他的名字。如图4, 在 $\triangle ADZ$ 和 $\triangle CFZ$ 中, 由角元塞瓦定理,

$$\frac{\sin \angle AZX}{\sin \angle DZX} = \frac{\sin \angle ZAX}{\sin \angle DAX} \cdot \frac{\sin \angle ADX}{\sin \angle ZDX}, \quad \frac{\sin \angle FZY}{\sin \angle CZY} = \frac{\sin \angle ZFY}{\sin \angle CFY} \cdot \frac{\sin \angle FCY}{\sin \angle ZCY},$$

因为 $\angle ZAX = \angle FCY$, $\angle DAX = \angle ZCY$, $\angle ADX = \angle ZFY$, $\angle ZDX = \angle CFY$, 所以 $\frac{\sin \angle AZX}{\sin \angle DZX} = \frac{\sin \angle FZY}{\sin \angle CZY}$ 。又因为 $\angle AZX + \angle DZX = \angle FZY + \angle CZY = \angle AZD \neq \pi$, 所以 $\angle AZX = \angle FZY$, $\angle DZX = \angle CZY$, X, Z, Y 三点共线。□

注: (1) Γ 退化为两条直线时即为帕普斯定理。 Γ 是其它非退化二次曲线时, 可以通过射影平面上的射影变换将 Γ 变为圆。因为射影变换将直线映为直线, 且保持点线之间的关联结构, 所以由上述 Γ 是圆时的证明可以完整地推出 Γ 是其它非退化二次曲线时的命题。(2) 事实上, 帕斯卡定理的逆命题也成立, 即射影平面上若一个六边形的三组对边交点共线, 则该六边形有外接二次曲线 (它可以像帕普斯定理那样退化成两条直线)。这个逆命题就是 Braikenridge-Maclaurin 定理。

习题 0.1 (五点确定一条二次曲线). 在基域 $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 上, 设 $S = \{P_i\}_{1 \leq i \leq 5} \subset \mathbb{P}^2$ 是五个不同的点。求证:

- (1) 存在一个二次曲线 C 通过 S 中的五个点。
- (2) C 是唯一的当且仅当五点中没有四点共线。
- (3) C 是不可约的当且仅当五点中没有三点共线。

证. (1) 设二次曲线 $C: F(X, Y, Z) = aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0$, 五个点坐标为 $P_i[X_i : Y_i : Z_i]$, $1 \leq i \leq 5$. C 经过 S 中五点等价于六元一次方程: $F(X_i, Y_i, Z_i) = 0$, $1 \leq i \leq 5$, 它有六个未知数和五个齐次方程, 所以必然存在一组不全为零的解 (a, b, c, d, e, f) , 它定义了 \mathbb{P}^2 上的一个过 S 中五点的二次曲线. (2) 若 S 中有四点共线, 不妨设 $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ 在直线 l 上. 此时任取一条过 P_5 的直线 l' , 则 $C = l \cup l'$ 过 S 中的五点, 于是 C 不唯一. 若过 S 中五点的二次曲线不唯一, 取其中两条不同的二次曲线 C_1, C_2 , 它们的交点数 $\geq 5 > \deg(C_1) \deg(C_2) = 4$. 由文末的 Bézout 定理知, C_1, C_2 必有公共分支. 设 l 是 C_1, C_2 的一个不可约的公共分支, 因为 $C_1 \neq C_2$, 所以 $\deg(l) \leq 1$, l 是一条直线. 设 $C_1 = l \cup l_1$, $C_2 = l \cup l_2$, 则直线 $l_1 \neq l_2$, 设点 $P = l_1 \cap l_2$, 则 $S \subset C_1 \cap C_2 = l \cup P$, S 中不等于 P 的所有点都在 l 上, 所以 S 中有四点共线. (3) 若 C 可约, 设 $C = l_1 \cup l_2$, 其中 l_1, l_2 是两条直线, 则五点中必有三点在同一直线上. 若五点中有三点共线, 设该直线为 l , 因为 $3 > \deg(l) \deg(C) = 2$, 由 Bézout 定理知, l 和 C 有公共分支, 于是 $l \subset C$, C 可约. \square

因为五点确定一条二次曲线, 所以一条二次曲线上至少要取六个点 (这就是帕斯卡定理中的条件) 才能得到特别的结论. 帕斯卡定理可以推广为下述关于三次曲线的定理. 该定理其实属于法国数学家夏莱 (Michel Chasles, 又译沙勒, 1793年—1880年), 但它经常被不正确地用 Cayley-Bacharach 的名字命名.

定理 0.3 (Chasles 定理, 即三次曲线的 Cayley-Bacharach 定理). 如图 5, 设 $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 是两条平面三次曲线, 它们交于 9 个不同的点 $S = \{P_i\}_{1 \leq i \leq 9}$. 若 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是任意一条过 $S_0 = \{P_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ 的三次曲线, 则 C 也过 P_9 .
注: 事实上, 该定理不需要 C_1, C_2 交于不同的点. 完整的叙述如下: 设 C_1, C_2 是 \mathbb{P}^2 中没有公共分支的两条三次曲线, C_1 是光滑的. 假设 C 是另一条三次曲线, 它经过 $C_1 \cap C_2$ 中带重数的八个交点, 则 C 经过 $C_1 \cap C_2$ 的第九个交点. 平面曲线相交重数的定义见后文.

Chasles 定理的部分证明. 下面我们只考虑定理陈述中 S_0 是八个不同的点的情形. 假设 \mathbb{P}^2 的基域为 k , k 可以取 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} . 设 $C_1: F_1(X, Y, Z) = 0$, $C_2: F_2(X, Y, Z) = 0$ 是 \mathbb{P}^2 中两条没有公共分支的三次曲线, $C_3: F_3(X, Y, Z) = 0$ 是过 S_0 中八个点的第三条三次曲线, $F_1, F_2, F_3 \in k[X, Y, Z]$ 是三次齐次多项式. 我们证明存在常数 $\lambda_1, \lambda_2 \in k$, 使得 $F_3 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ ①.

反证法: 假设不存在命题①中的 λ_1, λ_2 , 因为 F_1, F_2 线性无关, 所以 $F_3 \notin \text{span}\{F_1, F_2\}$, F_1, F_2, F_3 线性无关. 设 $P'[X_1 : Y_1 : Z_1]$, $P''[X_2 : Y_2 : Z_2] \in \mathbb{P}^2 \setminus S$ 是不同的两点, 我们证明存在三次曲线 C 经过 $S_0 \cup \{P', P''\}$ 的十个点 ②. 待定系数法, 设 $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k$, 则曲线 $C: F = 0$ 经过 S_0 的八个点. C 经过另外两点 P', P'' 等价于下列方程:

$$\begin{aligned}\lambda_1 F_1(X_1, Y_1, Z_1) + \lambda_2 F_2(X_1, Y_1, Z_1) + \lambda_3 F_3(X_1, Y_1, Z_1) &= 0, \\ \lambda_1 F_1(X_2, Y_2, Z_2) + \lambda_2 F_2(X_2, Y_2, Z_2) + \lambda_3 F_3(X_2, Y_2, Z_2) &= 0,\end{aligned}$$

存在不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k$ 满足上述方程. 此时三次曲线 $C: F = 0$ 经过 $S_0 \cup \{P', P''\}$ 的十个点.

下面我们证明 S_0 中没有四个点共线 ③. 否则设这条直线为 l , 它与 C_1 有四个交点. 因为 $4 > \deg(l) \cdot \deg(C_1) = 3$, 所以由文末的 Bézout 定理知, l 与 C_1 必有公共分支, 于是 $l \subset C_1$. 同理, $l \subset C_2$, l 是 C_1, C_2 公共分支, 矛盾! 再证明 S_0 中也没有七个点共二次曲线 ④. 否则设这条二次曲线为 Γ , 若 Γ 是可约的, 它的两个分支为直线 l_1, l_2 , 则这两条直线中必有一条包含了 S_0 中的四个点, 与命题③矛盾! 若 Γ 不可约, 因为 $7 > \deg(\Gamma) \deg(C_1) = 6$, 所以由 Bézout 定理知 Γ 与 C_1 必有公共分支, 于是 $\Gamma \subset C_1$. 同理, $\Gamma \subset C_2$, Γ 是 C_1, C_2 公共分支, 矛盾! 因为 S_0 中没有四点共线, 由上一个习题的第 (2) 问, 对 S_0 中的任意五个点, 存在唯一的二次曲线经过这五个点.

接下来, 我们证明 S_0 中没有三点共线 ⑤. 否则若某三点 $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ 在直线 l 上, 令 Γ 是 S_0 中另外五个点确定的二次曲线, 取一点 $P' \in l$, 另一点 $P'' \notin \Gamma$. 由命题②, 存在过 $S_0 \cup \{P', P''\}$ 十个点的三次曲线 D . D 经过 l 上的四个点, 因为 $4 > \deg(l) \deg(D) = 3$, 由 Bézout 定理知 l 是 D 的一个分支. 于是存在二次曲线 Γ' 使得 $D = l \cup \Gamma'$, 因为 $P'' \notin \Gamma$, $P'' \in \Gamma'$, 所以 $\Gamma \neq \Gamma'$. 但 Γ, Γ' 都经过五个点 $\{P_i\}_{4 \leq i \leq 8}$, 矛盾! 命题⑤得证.

最后, 设 Γ 是过 $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 5}$ 的二次曲线, 由命题④, 其余三点中至少有两点不在 Γ 上, 不妨设其中一点为 P_6 , $P_6 \notin \Gamma$. 设直线 $l = \overline{P_7 P_8}$, 选取 $P', P'' \in l \setminus S_0$, 由命题②知, 存在三次曲线 D 经过 $S_0 \cup \{P', P''\}$ 十个点. 此时 D 上有四点 P_7, P_8, P', P'' 在直线 l 上, 由Bézout定理知 l 是 D 的一个分支. 于是存在二次曲线 Γ' 使得 $D = l \cup \Gamma'$, 由命题⑤, P_6 不在 $l = \overline{P_7 P_8}$ 上, 所以 $P_6 \in \Gamma'$. 因为 $P_6 \notin \Gamma$, $P_6 \in \Gamma'$, 所以 $\Gamma \neq \Gamma'$, 但 Γ, Γ' 都经过五个点 $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 5}$, 矛盾! 所以命题①得证.

于是 $F_3(P_9) = \lambda_1 F_1(P_9) + \lambda_2 F_2(P_9) = 0$, C_3 也经过 P_9 . □

我们可以使用Chasles定理证明帕斯卡定理和它的逆命题 (Braikenridge-Maclaurin定理). 简单起见, 我们只考虑定理中九个点互不相同的情形.

用Chasles定理证明帕斯卡定理和它的逆命题. (1) 如图3, 设六点的外接二次曲线为 Γ , 假设 Γ 不可约 (可约的情形即为帕普斯定理). 我们考虑两条 (退化成三条直线的) 三次曲线: $C_1 = \overline{AB} \cup \overline{CD} \cup \overline{EF}$, $C_2 = \overline{BC} \cup \overline{DE} \cup \overline{FA}$. 注意 C_1, C_2 交集为 $S = \{A, B, C, D, E, F, X, Y, Z\}$, $|S| = 9$. 令三次曲线 $\Omega = \Gamma \cup \overline{XY}$, 它过 S 中除了 Z 以外的8个点. 由Chasles定理, Ω 过 S 中的第九个点 Z . 若 Z 在 Γ 上, 则直线 FA 与二次曲线 Γ 交于三个点 F, A, Z . 由Bézout定理, 直线 FA 与 Γ 必有公共分支, 这与 Γ 不可约矛盾! 所以 Z 在直线 XY 上, X, Y, Z 三点共线.

(2) 设六边形 $ABCDEF$ 三组对边交于 X, Y, Z 三点, 我们要求每组对边都不能重合. 已知 X, Y, Z 三点共线, 同样考虑两条三次曲线: $C_1 = \overline{AB} \cup \overline{CD} \cup \overline{EF}$, $C_2 = \overline{BC} \cup \overline{DE} \cup \overline{FA}$, 它们的交于 $S = \{A, B, C, D, E, F, X, Y, Z\}$ 九个点. 令 Γ 是经过 A, B, C, D, E 五点的二次曲线 (不一定唯一), 直线 XYZ 为 l , 三次曲线 $\Omega = \Gamma \cup l$, 它过 S 中除了 F 以外的8个点. 由Chasles定理, Ω 过点 F . 若 $F \in l$, 则可依次证明 E, A, D, B, C 都在直线 l 上, 这与每组对边不重合矛盾! 所以 $F \in \Gamma$, Γ 是六边形的外接二次曲线. □

真正属于英国数学家Arthur Cayley (1821年—1895年) 和德国数学家Isaak Bacharach (1854年—1942年) 的定理如下, 它考虑的是射影平面上任意次数的两条代数曲线. 该定理的证明需要许多高等知识, 所以我们只给出定理的叙述.

定理 0.4 (Cayley-Bacharach定理). 设 $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 分别是次数为 d 和 e 的平面曲线, 相交于 de 个不同的点, 交集为 $S = \{P_i\}_{1 \leq i \leq de}$. 如果 $C \subset \mathbb{P}^2$ 为任意一条次数为 $d+e-3$ 的平面曲线, 包含 S 中除一点之外的所有点, 则 C 包含 S 中的所有点.

注意到Chasles定理是上述完整的Cayley-Bacharach定理中 $d = e = 3$ 时的特殊情况. 值得一提的是, 我们可以适当地定义复射影平面上曲线在一点处的相交重数, 使得次数为 d 和 e 的两条没有公共分支的平面复射影曲线的总相交重数为 de . 这就是下述法国数学家Étienne Bézout (1730年—1783年) 的经典定理. 以下内容使用了本科阶段的交换代数和基础代数几何.

定义 0.1. 设 $R = \mathbb{C}[x, y]$ 是 \mathbb{C}^2 的坐标环, $K = \mathbb{C}(x, y) = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, f, g \in R, g \neq 0 \right\}$ 是 R 的分式域, 即 \mathbb{C}^2 上的有理函数域. 对任意一点 $P = (a, b) \in \mathbb{C}^2$, 和一个有理函数 $\phi = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \in K$, 我们说 ϕ 在 P 处有定义, 若 $g(a, b) \neq 0$. 此时我们令 $\phi(P) = \frac{f(a, b)}{g(a, b)} = \frac{f(P)}{g(P)}$. 我们定义点 P 处的局部环为 $\mathcal{O}_P = \{ \phi \in K, \phi \text{ 在 } P \text{ 处有定义} \} = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, f, g \in R, g(P) \neq 0 \right\}$.

习题 0.2. 验证下列事实: (1) \mathcal{O}_P 是 K 的一个子环, 且映射 $\xi: \mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{C}, \phi \mapsto \phi(P)$ 是一个满同态. (2) 设 $M_P = \{ \phi \in \mathcal{O}_P, \phi(P) = 0 \} = \ker(\xi)$, 则有下列直和分解: $\mathcal{O}_P = \mathbb{C} + M_P$, 以及 $\mathcal{O}_P/M_P \cong \mathbb{C}$. (3) $\phi \in \mathcal{O}_P$ 在 \mathcal{O}_P 中有乘法逆元当且仅当 $\phi \notin M_P$. \mathcal{O}_P 中任何 \mathcal{O}_P 以外的理想都包含在 M_P 中. 于是 M_P 是 \mathcal{O}_P 中唯一的极大理想, 这说明 \mathcal{O}_P 的确是一个局部环. (局部环的定义即有唯一极大理想的环.)

定义 0.2. 设 C_1, C_2 是复射影平面上的两条没有公共分支的曲线（也就是说，定义它们的方程没有公因子），次数分别为 n_1, n_2 。我们假设无穷远直线不是任何一条曲线的分支，并在仿射平面坐标 $x, y \in \mathbb{C}$ 下考虑此问题。设仿射平面上 $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, f_1(x, y) = 0\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, f_2(x, y) = 0\}$ 。我们的条件要求多项式 f_1, f_2 没有公因子，且次数分别为 n_1, n_2 。设 $(f_1, f_2)_P = \mathcal{O}_P f_1 + \mathcal{O}_P f_2$ 是 \mathcal{O}_P 中由 f_1, f_2 生成的理想。可以定义 C_1, C_2 在 P 点处的相交重数为

$$I(C_1 \cap C_2, P) = \dim\left(\frac{\mathcal{O}_P}{(f_1, f_2)_P}\right),$$

习题 0.3. (1) 若 $P \notin C_1 \cap C_2$ ，则 $I(C_1 \cap C_2, P) = 0$ 。

(2) 若 $P \in C_1 \cap C_2$ ，且 P 在 C_1, C_2 上都是非奇异点，以及 C_1, C_2 在 P 点处的切方向不同，则 $I(C_1 \cap C_2, P) = 1$ 。这种情形下，我们称 C_1, C_2 在点 P 处横截相交。

(3) 若 $P \in C_1 \cap C_2$ ，且 C_1, C_2 在点 P 处不横截相交，则 $I(C_1 \cap C_2, P) \geq 2$ 。

证明概要. (1) 不妨设 $P \notin C_1$ ，则 $f_1(P) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f_1} \in \mathcal{O}_P$ ，所以 $f_1 \in \mathcal{O}_P$ 是可逆的， $(f_1, f_2)_P = \mathcal{O}_P$ 。

(2) 设 $P = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ 。作泰勒展开，可以证明下述等式

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(P)(x - a) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(P)(y - b) + M_P^2 \text{中的余项}, \\ f_2(x, y) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(P)(x - a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(P)(y - b) + M_P^2 \text{中的余项}, \end{aligned}$$

因为 P 在 C_1, C_2 上都是非奇异点，所以 $\frac{\partial f_1}{\partial x}(P), \frac{\partial f_1}{\partial y}(P)$ 不全为零， $\frac{\partial f_2}{\partial x}(P), \frac{\partial f_2}{\partial y}(P)$ 不全为零。 C_1 在 P 处的法向量为 $(\frac{\partial f_1}{\partial x}(P), \frac{\partial f_1}{\partial y}(P))$ ， C_2 在 P 处的法向量为 $(\frac{\partial f_2}{\partial x}(P), \frac{\partial f_2}{\partial y}(P))$ ，它们不平行。这结合前面的泰勒展开能推出 $(f_1, f_2)_P = M_P$ 。

(3) 若 $P \in C_1 \cap C_2$ ，则 $f_1(P) = f_2(P) = 0$ ， $f_1, f_2 \in M_P = \{\phi \in \mathcal{O}_P, \phi(P) = 0\}$ ，因为 C_1, C_2 在点 P 处不横截相交，所以它们的法向量 $(\frac{\partial f_1}{\partial x}(P), \frac{\partial f_1}{\partial y}(P)) // (\frac{\partial f_2}{\partial x}(P), \frac{\partial f_2}{\partial y}(P))$ 。若这两个法向量全为0，则由前面的泰勒展开， $f_1, f_2 \in M_P^2 \subsetneq M_P$ ， $I(C_1 \cap C_2, P) \geq \dim(\frac{\mathcal{O}_P}{M_P^2}) = 3$ 。若这两个法向量不全为0，设不为零的法向量是 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ，则由泰勒展开， $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_P(\lambda(x - a) + \mu(y - b)) + M_P^2$ 。设上式右边的理想为 J ，则 $J \subsetneq M_P$ ， $I(C_1 \cap C_2, P) \geq \dim(\frac{\mathcal{O}_P}{J}) = 2$ 。□

定理 0.5 (平面射影曲线的Bézout定理). 设 C_1, C_2 是复射影平面上的两条没有公共分支的射影曲线，则有：

$$\sum_{P \in C_1 \cap C_2} I(C_1 \cap C_2, P) = \deg(C_1) \deg(C_2),$$

Bézout定理的一个直接推论是，如果两条次数分别为 d, e 的射影曲线没有共同分支并且在 de 个不同点相交，那么两条曲线在这些点上必须都是非奇异的，并且必须横截相交。定理中可将复射影平面上的曲线换成任何代数闭域上的平面射影曲线。本文中，我们已经多次使用了这个定理的下述推论：若平面上曲线 C_1, C_2 有大于 $\deg(C_1) \deg(C_2)$ 个不同的交点，则 C_1, C_2 必有公共分支。

习题 0.4. 代数基本定理可以看作Bézout定理的特殊情况。对一元 n 次多项式 $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ ， $a_i \in \mathbb{C}$ ， $0 \leq i \leq n-1$ ，令 $C_1 : Y = 0$ ， $C_2 : YZ^{n-1} = F(X, Z) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i Z^{n-i}$ 。由Bézout定理知它们的相交重数之和为 $\deg(C_1) \deg(C_2) = n$ ，这些交点对应了 $f(x) = 0$ 的 n 个带重数的复根。