绮丽的费尔巴哈定理

著名的费尔巴哈定理说三角形的九点圆与内切圆内切，与任一旁切圆外切。它的发现者是德国数学家Karl Wilhelm Feuerbach（1800年-1834年），他是更有名的德国哲学家Ludwig Feuerbach（1804年-1872年）的哥哥。我在高二时第一次听说这个定理，当时我非常喜欢它，但自己上大学前没有一次独立且成功地给出它的证明。我清晰地记得当时自己做平面几何题依然偏爱欧几里得式的证明，习惯作辅助线辅助点解题。但九点圆和内切圆的切点在哪儿？如何找到它与三角形别的已知元素的关系？我无法回答这些疑问。

本文中，我们给出费尔巴哈定理的三种证明，它们都多多少少运用了高中阶段讲授的，比古典欧氏几何更高等的工具。证法一中我小试牛刀地使用三角函数和向量，粗暴地算出了九点圆与内切圆的圆心距。我自己上大学后第一次完成该定理的证明使用的就是这个证法，它清晰地展示了三角函数和向量相比古典欧氏几何的优越性。证法二使用复数法算出了九点圆与内切圆的圆心距，证法三巧妙地使用了反演变换。

定理 0.1 (内切圆的费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$，则$\odot N$与$\odot I$内切。

分析一：只需证明九点圆与内切圆的圆心距等于两圆半径之差。为了计算两圆圆心距，证法一中我们使用了I点的重心坐标和欧拉线的有关性质。我们将本证法中用到的一些三角恒等式留作习题1。

证法一. 设$\triangle ABC$外心为O，垂心为H，重心为G。设$\odot O, \odot I$半径分别为R, r，则$\odot N$半径为$\frac{R}{2}$，只需证明$NI = \frac{R}{2} - r$ ①。设$p = \frac{a+b+c}{2}$，$x = p-a$，$y = p-b$，$z = p-c$，则由G, I的重心坐标，我们有

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2p}(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \qquad ②, \qquad \text{因为}\frac{x}{p} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$
$$\frac{y}{p} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}, \qquad \frac{z}{p} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, \qquad \text{所以②式右边} = \frac{1}{2}\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA},$$
$$IN^2 = \frac{R^2}{4}\Big(\sum\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + 2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\cos 2C\Big), \qquad ③$$

这里用到$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2\cos 2C$。因为$\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C$，所以

$$\text{③式右边括号内} = \Big(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\Big)^2 - 4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\Big(\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C\Big), \qquad ④$$
$$\text{因为}\tan\frac{C}{2}\sin^2 C = (1-\cos C)\sin C = \sin C - \frac{1}{2}\sin 2C,$$
$$\text{所以}\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C = \sum\sin C - \frac{1}{2}\sum\sin 2C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin A\sin B\sin C,$$
$$\text{又因为}\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1, \qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\sin C = 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$
$$\text{所以④式右边} = 1 - 16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \Big(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big)^2,$$

于是$IN = \frac{R}{2}\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \frac{R}{2} - r$，①式成立。 □

习题 0.1. 给定$\triangle ABC$，p, r, x, y, z的定义同证法一。
（1）求证：$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$；（2）求证：

$$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \qquad r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$x=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad y=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad z=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

（3）求证：$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$。

分析二：这是一个使用复数法的证明，它是我知道的最简洁的证明。设$\odot O$为复平面上的单位圆，它的关键是巧妙地寻找单位复数x,y,z，使得A,B,C,I四点对应的复数都能用x,y,z简洁地表示出来。

引理 0.1. 设A,B,C是复平面单位圆上的三点，O,I分别是$\triangle ABC$的外心和内心，AI,BI,CI分别交$\odot O$于另一点D,E,F。我们有：（1）存在复数x,y,z使得$a=x^2$，$b=y^2$，$c=z^2$，且$d=-yz$，$e=-zx$，$f=-xy$。这里a,b,c,d,e,f表示大写字母对应点的复数。（2）此时内心I对应的复数为$-(xy+yz+zx)$。

引理的证明. （1）先考虑$a=1$的情形，此时令$x=-1$，则$x^2=a$。D,E,F三点的位置已经确定，设$y=f$，$z=e$，则$f=-xy$，$e=-xz$。因为F是点C所对的弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以$y^2=b$，同理，$z^2=c$。还需要证明$d=-yz$，如图2，这是因为$\arg b=2\arg y$，$\arg c=2\arg z-2\pi$，$\arg d=\dfrac{1}{2}(\arg b+\arg c)=\arg y+\arg z-\pi$。我们将$a$为任意单位复数的一般情形作为练习留给读者。

（2）$\triangle DEF$的外心为O。因为$AI\perp EF$，$BI\perp FD$，$CI\perp DE$，所以$\triangle DEF$的垂心为I。于是$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$，$I$对应的复数为$d+e+f=-(xy+yz+zx)$。 □

证法二. 由上述引理，点N对应的复数为$\dfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。于是$IN=|\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)|=\dfrac{1}{2}|x+y+z|^2$。另一边，由欧拉定理，$\dfrac{R}{2}-r=\dfrac{OI^2}{2R}=\dfrac{1}{2}|xy+yz+zx|^2=\dfrac{1}{2}|xyz(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})|^2=\dfrac{1}{2}|\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}|^2=\dfrac{1}{2}|x+y+z|^2=IN$。所以$\odot N$与$\odot I$内切。 □

习题 0.2. （1）证明（1）问中a为任意单位复数的一般情形；（2）在上述引理的背景下，三个旁心I_A,I_B,I_C所对应的复数用x,y,z表示分别是什么？

分析三：我们使用反演变换证明$\odot N$与$\odot I$，$\odot I_A$都相切，这同时证明了下述旁切圆的费尔巴哈定理。

证法三. 设BC中点为M。以M为中心，$\dfrac{|c-b|}{2}$为半径作反演变换φ，因为M在$\odot N$上，所以它将九点圆映为一条直线l。因为M到$\odot I$，$\odot I_A$的切线长均为$\dfrac{|c-b|}{2}$，所以φ分别将它们映到自身，$\varphi(\odot I)=\odot I$，$\varphi(\odot I_A)=\odot I_A$。我们证明$l$与$BC$关于$AI$对称 ①。设$AI$交$BC$于点$J$，$A$到$BC$的投影为点$K$，则$MJ=\dfrac{a}{2}-\dfrac{ac}{b+c}=\dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$，$MK=\dfrac{a}{2}-c\cos B=\dfrac{a^2-(a^2+c^2-b^2)}{2a}=\dfrac{b^2-c^2}{2a}$。因为$MJ\cdot MK=\dfrac{(b-c)^2}{4}$，所以$\varphi(J)=K$，$\varphi(K)=J$，$J$在$l$上。因为$l\perp NM$，$NM\parallel OA$，所以$l\perp OA$。设$l$与$AC$交于$B'$点，则$\angle AJB'=\dfrac{\pi}{2}-\angle OAI=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B-C}{2}=C+\dfrac{A}{2}=\angle AJB$，命题①成立。因为$\odot I$，$\odot I_A$都关于$AI$对称，$BC$与它们都相切，所以$l$与$\odot I$，$\odot I_A$都相切。将$l$与上述两圆用$\varphi$反演，得$\odot N$与$\odot I$，$\odot I_A$都相切。 □

习题 0.3. 如何证明$\odot N$与$\odot I$内切，与$\odot I_A$外切？

定理 0.2 (旁切圆的费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则九点圆$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。

证. 我们只证明$\odot N$与$\odot I_A$外切，同理可得$\odot N$与$\odot I_B,\odot I_C$外切。设$\odot I_A$半径为r_A，只需证明$I_AN=\dfrac{R}{2}+r_A$ ①。设O为原点，则$N=\dfrac{1}{2}(A+B+C)$，$I_A-A=\dfrac{p}{p-a}(I-A)$，$I_A=\dfrac{p}{p-a}I-\dfrac{a}{p-a}A=\dfrac{1}{b+c-a}(bB+$

$cC-aA)$，$\overrightarrow{I_AN}=N-I_A=\dfrac{1}{2x}(pA-zB-yC)$ ②。由习题1，

$$②式右边=\frac{1}{2}(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\overrightarrow{OA}-\cot\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\overrightarrow{OB}-\cot\frac{B}{2}\tan\frac{A}{2}\overrightarrow{OC}),$$

$$I_AN^2=\frac{R^2}{4}[\cot^2\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\cdot(\tan\frac{A}{2}\cos 2A-\cot\frac{B}{2}\cos 2B-\cot\frac{C}{2}\cos 2C)]=\frac{R^2}{4}[(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-\tan\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2})^2$$

$$+4\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}(\cot\frac{B}{2}\cdot\sin^2 B+\cot\frac{C}{2}\cdot\sin^2 C-\tan\frac{A}{2}\cdot\sin^2 A)],\qquad ③$$

$$因为\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})=1,\qquad \cot\frac{B}{2}\cdot\sin^2 B+\cot\frac{C}{2}\cdot\sin^2 C-\tan\frac{A}{2}\cdot\sin^2 A$$

$$=\sin B(1+\cos B)+\sin C(1+\cos C)-\sin A(1-\cos A)=\sin B+\sin C-\sin A+\frac{1}{2}\sum\sin 2A$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2\sin A\sin B\sin C,\qquad 所以③式右边=\frac{R^2}{4}(1+16\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$+64\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2})=\frac{R^2}{4}(1+8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})^2,\qquad I_AN=\frac{R}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

因为$r_A=p\tan\dfrac{A}{2}=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$，所以①式成立。 □

称$\triangle ABC$中九点圆与内切圆的切点为费尔巴哈点，下面这题与费尔巴哈点的位置有关。

例 0.1. 设$\triangle ABC$的内心为I，外心为O，九点圆圆心为N。AI交$\odot O$于D，直线l过点I且平行于BC，A'与A关于l对称。$AH\perp BC$于H，BC中点为M，$\triangle ABC$的费尔巴哈点为F。求证：$\triangle IDA'\backsim\triangle FMH$。

分析一：本题的关键是证明$\dfrac{ID}{IA'}=\dfrac{FM}{FH}$，上式的主要困难是如何算出右边。我的想法是把$FM,FH$看作$\odot N$中的两条弦，用正弦定理将上式右边转化为计算$\dfrac{\sin\angle FHM}{\sin\angle FMH}$。

证法一. 设$\odot O$半径为R，则$\angle DIA'=\pi-2(\dfrac{A}{2}+B)=C-B$，因为$MN/\!/AO$，所以$\angle MFH=\dfrac{1}{2}\angle MNH=\angle OAH=A-2(\dfrac{\pi}{2}-C)=C-B=\angle DIA'$ ①。

$$IA'=IA=DA-DI=2R(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2})=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad \frac{ID}{IA'}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},\qquad ②$$

$$设\angle INM=\alpha,\ \angle INH=\beta,\ 则\frac{FM}{FH}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}}\qquad ③,\qquad 因为NM=NH,$$

$$所以\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}=\frac{NI\cdot NM-\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NM}}{NI\cdot NH-\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NH}}\qquad ④,\qquad 由例1知\overrightarrow{IN}=\frac{1}{2}(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA}),$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\qquad \overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{R^2}{4}(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\cos 2C+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cos 2B)$$

$$=\frac{R^2}{4}[\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-2\tan\frac{A}{2}(\tan\frac{C}{2}\sin^2 C+\tan\frac{B}{2}\sin^2 B)],$$

$$又因为NI=\frac{R}{2}(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}),\qquad NM=\frac{R}{2},$$

$$所以④式分子\cdot\frac{4}{R^2}=1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1+2\tan\frac{A}{2}(\tan\frac{C}{2}\sin^2 C+\tan\frac{B}{2}\sin^2 B),\qquad ⑤$$

$$上式右边括号=\sin B(1-\cos B)+\sin C(1-\cos C)=\sin B+\sin C-\frac{1}{2}(\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin(B+C)\cos(B-C)=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin A\cos(B-C),$$

$$⑤式右边=4\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B-C}{2})-4\sin^2\frac{A}{2}\cos(B-C)=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B-C}{2}, \qquad ⑥$$

再计算④式分母。过A作BC的平行线交$\odot O$于另一点A_1，则$\overrightarrow{HN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1}$，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2\cos 2(B-C),\qquad \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2B,\qquad \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2C,$$

$$\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NH}=\frac{1}{4}(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA_1}=\frac{R^2}{4}[\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin^2(B-C)$$

$$-2\tan\frac{A}{2}(\tan\frac{C}{2}\sin^2B+\tan\frac{B}{2}\sin^2C)],\qquad ④式分母\cdot\frac{4}{R^2}=1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$$

$$+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin^2(B-C)+2\tan\frac{A}{2}(\tan\frac{C}{2}\sin^2B+\tan\frac{B}{2}\sin^2C),\qquad ⑦$$

$$上式右边括号=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(2\cos^2\frac{B}{2}\sin B+2\cos^2\frac{C}{2}\sin C)=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}[\sin B+\sin C$$

$$+\frac{1}{2}(\sin 2B+\sin 2C)]=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}[2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin(B+C)\cos(B-C)]$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos(B-C)),\qquad 所以⑦式右边$$

$$=-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin^2(B-C)+4\sin\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\cdot(2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B-C}{2})=2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\sin^2(B-C)-4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B-C}{2})$$

$$=2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin^2\frac{B-C}{2}\cdot 4(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2})(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2})$$

$$=32\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{B-C}{2},\qquad 结合⑥式知④式右边=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}},$$

所以③式右边=②式右边，$\dfrac{ID}{IA'}=\dfrac{FM}{FH}$，由①式知$\triangle IDA'\backsim\triangle FMH$。 □

分析二：本题也可以用复数法解决，要证$\dfrac{f-m}{f-h}=\dfrac{i-d}{i-a'}$，这里$i$表示$I$点对应的复数。

证法二. 设$\odot O$为复平面上的单位圆。由引理1，存在复数x,y,z使得$a=x^2$，$b=y^2$，$c=z^2$，且$i=-(xy+yz+zx)$。因为$\odot N$半径为$\frac{1}{2}$，结合定理1中NI长度的复数表示，我们有

$$f-n=\frac{1/2}{NI}(i-n),\qquad NI=\frac{1}{2}|x+y+z|^2,\qquad i-n=-\frac{1}{2}(x+y+z)^2,$$

$$f=\frac{1/2}{NI}(i-n)+n=-\frac{(x+y+z)^2}{2|x+y+z|^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2},\qquad m=\frac{y^2+z^2}{2},$$

$$由下述习题4，h=\frac{1}{2}(b+c+a-bc\overline{a})=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-y^2z^2\overline{x}^2),$$

$$f-m=-\frac{(x+y+z)^2}{2|x+y+z|^2}+\frac{x^2}{2},\qquad f-h=-\frac{(x+y+z)^2}{2|x+y+z|^2}+\frac{y^2z^2\overline{x}^2}{2},$$

$$\frac{f-m}{f-h}=\frac{-(x+y+z)^2+x^2|x+y+z|^2}{-(x+y+z)^2+y^2z^2\overline{x}^2|x+y+z|^2}=\frac{(x+y+z)(x^2(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})-x-y-z)}{(x+y+z)(y^2z^2\overline{x}^2(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})-x-y-z)}$$

$$=\frac{(y+z)(x^2-yz)\overline{yz}}{(y^2z^2(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})-x^2(x+y+z))\overline{x}^2}\qquad ①,\qquad 上式右边分母的括号=yz^2+y^2z-x^2y-x^2z$$

$$+\frac{y^2z^2}{x}-x^3=(y+z)(yz-x^2)+\frac{1}{x}(yz-x^2)(yz+x^2)=(yz-x^2)(y+z+\frac{yz+x^2}{x})$$
$$=(yz-x^2)(x+y)(x+z)\overline{x},\qquad \text{所以①式右边}=\frac{-(y+z)/yz}{(x+y)(x+z)\overline{x}^3}=-\frac{x^3(y+z)}{yz(x+y)(x+z)},$$

再看另一边，$\angle AIA'=2(C+\frac{A}{2})=\pi+C-B$，$\overrightarrow{A'I}$由$\overrightarrow{AI}$逆时针旋转$\pi+C-B$得到。回忆引理1的证明，可以不妨设$a=1$，$x=-1$，$y$为点$C$所对的弧$\widehat{AB}$的中点，$z$为点$B$所对的弧$\widehat{AC}$的中点。如图2，此时$C=\arg y$，$B=2\pi-\arg z$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}=-\frac{y}{x}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}=-\frac{x}{z}$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}=-\frac{z}{x}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+C-B)}=-\frac{yz}{x^2}$。

$$i-d=-(xy+yz+zx)-(-yz)=-x(y+z),\qquad i-a'=(i-a)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+C-B)}$$
$$=-(xy+yz+zx+x^2)\cdot(-\frac{yz}{x^2})=(x+y)(x+z)\cdot\frac{yz}{x^2},\qquad \frac{i-d}{i-a'}=-\frac{x^3(y+z)}{yz(x+y)(x+z)},$$

所以$\frac{f-m}{f-h}=\frac{i-d}{i-a'}$，$\triangle IDA'\backsim\triangle FMH$。 □

习题 0.4. 复平面的单位圆上有两个不同的点A,B，Z是任意一点。（1）求证：$\frac{\overline{b-a}}{b-a}=-\overline{ab}$；（2）设$ZH\perp AB$于$H$，则$h=\frac{1}{2}(a+b+z-ab\overline{z})$。提示：作变换$\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，$x\mapsto\frac{x-a}{b-a}$，则$\varphi(a)=0$，$\varphi(b)=1$，$\varphi^{-1}(y)=(b-a)y+a$。设$w=\varphi(z)$，则$h=\varphi^{-1}(\frac{w+\overline{w}}{2})$。

我们用一道多年以前国家集训队的考题结束这篇文章。

例 0.2 (2011，中国集训队)**.** 在$\triangle ABC$中，$BC>CA>AB$，它的九点圆与内切圆及三个旁切圆分别切于点T,T_A,T_B,T_C。求证：线段TT_B与线段T_CT_A相交。

证. 设D,E,F分别是三边BC,CA,AB的中点，K,L,M分别是A,B,C三点到对边的投影。我们证明一个更困难的命题：TT_B，T_AT_C，KM，DF四线共点。先证明TT_B，KM，DF三线共点，在$\odot N$中由三弦共点定理，只需证明$\frac{MT_B}{T_BF}\cdot\frac{FK}{KT}\cdot\frac{TD}{DM}=1$ ①。设AI交$\odot O$于点P，则由例1，$\frac{TD}{KT}=\frac{IP}{IA}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$。设$CI_B$交$\odot O$于点$Q$，与例1类似地可以证明$\frac{MT_B}{T_BF}=\frac{CI_B}{QI_B}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$。于是①式左边$=\frac{FK}{DM}\cdot\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{c/2}{a/2}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=1$，①式成立，$TT_B$，$KM$，$DF$三线共点。再证明$T_AT_C$，$KM$，$DF$三线共点，类似地，只需证明$\frac{MT_A}{T_AF}\cdot\frac{FK}{KT_C}\cdot\frac{T_CD}{DM}=1$ ②。类似例1，可以证明$\frac{MT_A}{T_AF}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$，$\frac{T_CD}{KT_C}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}$。所以②式左边$=\frac{FK}{DM}\cdot\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{c/2}{a/2}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=1$，②式成立，$T_AT_C$，$KM$，$DF$三线共点。于是$TT_B$，$T_AT_C$，$KM$，$DF$四线共点。

回到原题，因为T,T_A,T_B,T_C四点共圆，它们组成一个凸四边形，所以要么线段TT_B与线段T_CT_A相交，此时交点必在$\odot N$内，要么直线TT_B与直线T_CT_A相交于$\odot N$外。设KM与DF交于点S，因为$BF=\frac{c}{2}<a\cos B=BM$，$BK=c\cos B<\frac{a}{2}=BD$，所以$S$是线段$KM$与线段$DF$的交点。于是$S$在凸四边形$MFKD$内，$S$在$\odot N$内，线段$TT_B$与线段$T_CT_A$相交。 □

习题 0.5. F,M,Q三点的定义同例2的证明，请补充证明$\frac{MT_B}{T_BF}=\frac{CI_B}{QI_B}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$。