组合问题选讲-1

下面这题来自邹瑾老师，虽然披着组合数学的面纱，但它实际上是一个和分圆多项式有关的高等代数问题。后面三题是笔者自己和董振言同学思考的相关问题。

例 0.1. 求作一个 1990 边形，它的各内角相等，各边长分别为 $1^2, 2^2, ..., 1990^2$。事实上，本题中 1990 可以改为任意 $n = 2pq$，$p, q \geq 3$ 为互质的正奇数。

证. $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$。先作一个 995 边形，它的各内角相等，各边长分别为 $1, 2, ..., 995$。设 $p = 5$, $q = 199$, $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{pq}}$ 为 pq 次单位根。我们构造 $1, 2, ..., pq$ 的一个排列 $a_0, a_1, ..., a_{pq-1}$，使得

$$a_0 + a_1\omega + ... + a_{pq-1}\omega^{pq-1} = 0, \qquad ①$$

设 $g(\omega) = 1 + 2\omega^q + ... + p\omega^{(p-1)q}$，因为 ω^q 为 p 次单位根，所以 $1 + \omega^q + ... + \omega^{(p-1)q} = 0$，

$$\begin{aligned} g(\omega) &= (p+1) + (p+2)\omega^q + ... + 2p\omega^{(p-1)q} = ... \\ &= [(q-1)p+1] + [(q-1)p+2]\omega^q + ... + qp\omega^{(p-1)q}, \end{aligned}$$

又因为 ω^p 为 q 次单位根，所以 $1 + \omega^p + ... + \omega^{(q-1)p} = 0$，

$$\begin{aligned} 0 = [1 + \omega^p + ... + \omega^{(q-1)p}]g(\omega) &= 1 + 2\omega^q + ... + p\omega^{(p-1)q} \\ &+\omega^p[(p+1) + (p+2)\omega^q + ... + 2p\omega^{(p-1)q}] + ... \\ &+\omega^{(q-1)p}\{[(q-1)p+1] + [(q-1)p+2]\omega^q + ... + qp\omega^{(p-1)q}\}, \end{aligned}$$

上式右边展开后每项中 ω 的幂次为 $\{kp + lq \mid 0 \leq k \leq q-1,\ 0 \leq l \leq p-1\}$，其中任意两个不同的幂次 $k_1p + l_1q$, $k_2p + l_2q$ 都满足

$$(k_1 - k_2)p \not\equiv (l_2 - l_1)q \pmod{pq}, \qquad \text{即} k_1p + l_1q \not\equiv k_2p + l_2q \pmod{pq},$$

所以这些幂次恰好组成一个模 pq 的完全剩余系，①式得证。

回到原题，由以上论述，可以作一个 995 边形，它的各内角相等，各边长分别为 $4k-1$ $(1 \leq k \leq 995)$。对任意 $1 \leq k \leq 995$，将长为 $4k-1$ 的边换成长为 $(2k-1)^2, (2k)^2$，且方向相反的一对边，知原命题成立。 □

例 0.2. 设 p 为奇素数，求证：各内角都相等，且边长为正整数的 p 边形一定是正 p 边形。

引理 0.1. （1）设 $g(x) = 1 + x + ... + x^{p-1}$，则 $g(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的既约多项式。这是因为

$$g(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \binom{p}{p-1}x^{p-2} + ... + \binom{p}{2}x + \binom{p}{1}, \qquad ①$$

设 $h(x) =$①式右边，则 $h(x)$ 满足首项系数为 1，其余各项系数被 p 整除，且常数项不被 p^2 整除。由艾森斯坦判别法，$h(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的既约多项式，于是 $g(x) = h(x-1)$ 也是。

（2）设 $\mathbb{F}$ 为任意域，则 $\mathbb{F}[x]$ 中的任意两个非零多项式之间可以做带余除法，由此推出 $\mathbb{F}[x]$ 中任意

两个非零多项式 $f(x),g(x)$ 有最大公因式 $d(x)$，且有裴蜀恒等式：存在 $\mathbb{F}[x]$ 中的多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$。$u(x),v(x)$ 可由 $\mathbb{F}[x]$ 中的带余除法和扩展的欧几里得算法具体求出。

证. 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}}$ 为 p 次单位根，正整数 $a_0,a_1,...,a_{p-1}$ 满足 $a_0+a_1\omega+...+a_{p-1}\omega^{p-1}=0$，我们证明 $a_0=a_1=...=a_{p-1}$。设 $f(x)=a_0+a_1x+...+a_{p-1}x^{p-1}$, $g(x)=1+x+...+x^{p-1}$, $q(x)=f(x)-a_{p-1}g(x)$，则 $f(\omega)=g(\omega)=q(\omega)=0$。假设 $q(x)$ 不是零多项式，则 $0\le\deg q(x)\le n-2$，由引理（2），$g(x)$ 与 $q(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有最大公因式。又因为 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中既约，所以这个最大公因式必为常数，不妨设它为 1。由引理（2），存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使得 $u(x)g(x)+v(x)q(x)=1$。上式中代入 $x=\omega$，由 $g(\omega)=q(\omega)=0$ 得到矛盾！所以 $q(x)$ 是零多项式，$a_0=a_1=...=a_{p-1}$。 □

例 0.3. 设 p 为素数。求证：不存在各内角都相等，且各边长分别为 $1,2,...,p^2$ 的 p^2 边形。

引理 0.2. （1）设 $g(x)=1+x^p+...+x^{(p-1)p}$，则 $g(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的既约多项式。这是因为

$$g(x+1)=1+(x+1)^p+...+(x+1)^{(p-1)p}$$

设 $h(x)=$①式右边，则 $h(x)$ 满足首项系数为 1，其余各项系数被 p 整除，且常数项不被 p^2 整除。由艾森斯坦判别法，$h(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的既约多项式，于是 $g(x)=h(x-1)$ 也是。

证. 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^2}}$ 为 p^2 次单位根，正整数 $a_0,a_1,...,a_{p^2-1}$ 满足

$$a_0+a_1\omega+...+a_{p^2-1}\omega^{p^2-1}=0,$$

我们证明对任意 $0\le j\le p-1$，有 $a_j=a_{j+p}=...=a_{j+(p-1)p}$。设 $f(x)=a_0+a_1x...+a_{p^2-1}x^{p^2-1}$，因为 ω 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的极小多项式为 $g(x)=1+x^p+...+x^{(p-1)p}$，且 $f(\omega)=0$，所以在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有 $g(x)\mid f(x)$。设 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $\deg h(x)=\deg f(x)-\deg g(x)=p-1$。因为 $g(x)$ 为本原多项式，由高斯引理，$h(x)\in\mathbb{Z}[x]$。设 $h(x)=c_0+c_1x+...+c_{p-1}x^{p-1}$，则对任意 $0\le j\le p-1$，有 $c_j=a_j=a_{j+p}=...=a_{j+(p-1)p}$。于是 $a_0,a_1,...,a_{p^2-1}$ 不可能互不相同。

注：（1）可将本题中的 p^2 改为任意的 p^α，$\alpha\ge2$。此时若有正整数 $a_0,a_1,...,a_{p^\alpha-1}$ 满足

$$a_0+a_1\omega+...+a_{p^\alpha-1}\omega^{p^\alpha-1}=0,$$

则对任意 $0\le j\le p^{\alpha-1}-1$，有 $a_j=a_{j+p^{\alpha-1}}=...=a_{j+(p-1)p^{\alpha-1}}$。

（2）可以用下列事实代替高斯引理：带余除法中，整系数多项式除以整系数首一多项式，商和余式都是整系数多项式。 □

例 0.4. 求证：不存在各内角都相等，且各边长分别为 $1^2,2^2,...,12^2$ 的 12 边形。

证. 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{12}}$ 为 12 次单位根，正整数 $a_0,a_1,...,a_{11}$ 满足

$$a_0+a_1\omega+...+a_{11}\omega^{11}=0,$$

设 $f(x)=a_0+a_1x...+a_{11}x^{11}$，因为 ω 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的极小多项式为 $g(x)=1-x^2+x^4$，且 $f(\omega)=0$，所以在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有 $g(x)\mid f(x)$。设 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $\deg h(x)=\deg f(x)-\deg g(x)=7$。因为 $g(x)$ 为

本原多项式，由高斯引理，$h(x)\in\mathbb{Z}[x]$。设 $h(x)=c_0+c_1x+...+c_7x^7$，则

$$a_0+a_1x...+a_{11}x^{11}=(1-x^2+x^4)(c_0+c_1x+...+c_7x^7),$$

$$a_0=c_0,\quad a_2=c_2-c_0,\quad a_4=c_4-c_2+c_0,\quad a_6=c_6-c_4+c_2,\quad a_8=-c_6+c_4,\quad a_{10}=c_6,$$

$$a_1=c_1,\quad a_3=c_3-c_1,\quad a_5=c_5-c_3+c_1,\quad a_7=c_7-c_5+c_3,\quad a_9=-c_7+c_5,\quad a_{11}=c_7,$$

假设 $a_0,a_1,...,a_{11}$ 恰为 $1^2,2^2,...,12^2$ 的一个排列，则

$$c_2=a_0+a_2=a_6+a_8,\quad c_4=a_2+a_4=a_8+a_{10},\quad a_2-a_8=a_6-a_0=a_{10}-a_4,\qquad ①$$

同理，$c_3=a_1+a_3=a_7+a_9,\quad c_5=a_3+a_5=a_9+a_{11},\quad a_3-a_9=a_7-a_1=a_{11}-a_5,\qquad ②$

$1^2,2^2,...,11^2$ 中不存在五个不同的数，和 12^2 一起满足①或②式。也就是说，不存在不同的 $x,y,z,u,v\in\{1,2,...,11\}$，使得 $12^2-x^2=y^2-z^2=u^2-v^2$。枚举 x，再对 12^2-x^2 作质因数分解即可。 □

下面这题来自付云皓老师，证法十分巧妙，有加性组合的背景。

例 0.5. 一个 13×13 的方格表的每个方格里有一个整数，求证：我们可以选择 2 行 4 列，使得它们交叉处的 8 个方格内的数之和是 8 的倍数。

引理 0.3. （1）三个整数中必有两个数同奇偶，它们的和为偶数。

（2）七个整数中必有四个数和为四的倍数，证明如下：由（1），可先取出两数 a_1,a_2，它们和为偶数；再从剩余五个数中取出两数 a_3,a_4，它们和为偶数；最后从剩余三个数中取出两数 a_5,a_6，它们和为偶数。a_1+a_2,a_3+a_4,a_5+a_6 三数模 4 余 0 或 2，其中必有两数模 4 余数相同，它们的和被四整除。该引理是 Erdös-Ginzburg-Ziv 定理的特殊情形。

证. 将每两行看作一个抽屉，共 $\binom{13}{2}=78$ 个抽屉。同一列的两个数如果和为偶数，将它们看作一个苹果放入对应行的抽屉中。设第 i 列有 α_i 个偶数，$13-\alpha_i$ 个奇数，则它们之间有

$$\binom{\alpha_i}{2}+\binom{13-\alpha_i}{2}\geq\binom{6}{2}+\binom{7}{2}=36,\qquad ①$$

对数和为偶数，即这列有至少 36 个苹果，等号成立当且仅当 $\alpha_i=6,7$。方格表的 13 列中总共有至少 $13\cdot36=6\cdot78$ 个苹果。

（1）存在一个抽屉有至少 7 个苹果，即存在两行七列使得每列两数之和均为偶数。此时由引理，必能取出四列使得这两行四列和为 8 的倍数。

（2）每个抽屉恰有 6 个苹果，此时对每个 $1\leq i\leq13$，①式等号都成立，$\alpha_i=6,7$。我们证明这是不可能的。考察前三行，它们在每列对应了三个数，其中和为偶数的两数对只能有 1 个或 3 个。于是方格表的 13 列中总共有奇数个苹果属于前三行中的两行（它们组成三个抽屉），这与这三个抽屉各有 6 个苹果矛盾！

注：（1）笔者曾尝试将每四列看作一个抽屉，将同一行和为 4 的倍数的四元组看作一个苹果。设某行 13 个数中模 4 余 0,1,2,3 的各有 a,b,c,d 个，因为

$$4=0+0+0+0=1+1+1+1=2+2+2+2=3+3+3+3$$

$$=0+0+1+3=1+1+2+0=2+2+3+1=3+3+0+2$$
$$=0+0+2+2=1+1+3+3,$$

且 $a+b+c+d=13$，所以和为 4 的倍数的四元组数为

$$\binom{a}{4}+\binom{b}{4}+\binom{c}{4}+\binom{d}{4}+\binom{a}{2}bd+\binom{b}{2}ca+\binom{c}{2}db+\binom{d}{2}ac+\binom{a}{2}\binom{c}{2}+\binom{b}{2}\binom{d}{2}\geq 50,$$

当且仅当 $(a,b,c,d)=(7,6,0,0)$ 及其置换时上式等号成立。假设方格表有 29 行, 则抽屉总数为 $\binom{13}{4}=715$，苹果总数至少有 $29\cdot 50=1450$ 个，必有一个抽屉有至少 $\lceil\frac{1450}{715}\rceil=3$ 个苹果。这三个四元组和都为 4 的倍数，由引理知必有两个四元组和为 8 的倍数。

（2）是否存在 13×12 或 12×13 的方格表，使得其中没有两行四列和为 8 的倍数? $\square$